

Sonderdruck aus
„Archiv für Kreislaufforschung“
Band 51, Seite 68-139, 1967
Dr. Dietrich Steinkopff Verlag, Darmstadt

**Medizinische
Habilitationsschrift
Erlangen**

Aus dem II. Physiologischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg
(Direktor: Prof. Dr. E. Wetterer)

**Neue Gesichtspunkte und Experimente
zur Beschreibung und Messung der Arterienelastizität*)**

Von **TH. KENNER**

Mit 22 Abbildungen in 32 Einzeldarstellungen und 9 Tabellen

(Eingegangen am 14. Dezember 1966)



1. Einleitung

Inhalt: Ein Überblick über die bisher zur Beschreibung der Arterienelastizität angewandten Elastizitätsmoduln zeigt, daß diese weder zur exakten Beschreibung der Dehnbarkeit der Arterien, noch zur Analyse komplizierter Dehnungsvorgänge genügen.

ERNST HEINRICH WEBER, den man gemeinsam mit seinem Bruder WILHELM als den Begründer der Biophysik des Kreislaufs bezeichnen kann, schreibt den Arterien vier Eigenschaften zu (1851): „Quadruplex est utilitas parietis elastici arteriarum, prima, qua sanguinis cursum, alioquin singulis pulsibus cordis acceleratum, magis aequabilem reddat, altera, qua efficiat, ut motus cordis sanguini in vasis magis magisque remotis incluso sensim communicari possit, utque vis cordis, elasticitati arterium adiuta par sit sanguini propellendo, cui, demta illa, impar foret. Tertia utilitas parietis elastici arteriarum in eo posita est, quod canales arteriarum semper apertos teneat, quarta denique arteriarum rupturae resistat.“

*) Von der Medizinischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg als Habilitationsschrift angenommen.

Die erste Eigenschaft kann man als Windkesselprinzip bezeichnen. Ungeachtet der Art und Weise, wie das Arteriensystem den diskontinuierlichen Auswurf des Herzens in eine fast kontinuierliche Strömung umwandelt, stellt dieses Prinzip eine Analogie zu der Funktion des luftgefüllten Windkessels einer Feuerspritze her: „Quod in siphone aer, idem elastici arteriarum parietes in corpore humano efficiunt“.

Wie O. FRANK (1899) in seiner mathematischen Fassung dieses Prinzips gezeigt hat, ist das Maß für die elastischen Eigenschaften des Windkessels die Volumelastizität

$$[1,1] \quad E'_{\text{ges}} = dp/dV$$

wobei dV den Volumenzuwachs des gesamten Windkessels bedeutet, der durch den Druckzuwachs dp bewirkt wird.

Die zweite Eigenschaft stellt das Schlauchwellenprinzip dar. E. H. WEBER hat als erster experimentell zweifelsfrei die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der arteriellen Pulse nachweisen können: „Ita cor quoque undas sanguinis gignit, quae sensim omnes sanguinis particulas promovent“. Die elastische Dehnbarkeit verschiedener Arterien wirkt demnach nicht gleichzeitig und ist nicht unmittelbar als ganzes an der Speicherung und Verteilung des Schlagvolumens beteiligt. Dieses wird in Form einer Welle in die Peripherie geleitet, so daß verschiedene Windkesselabschnitte sukzessive Blutvolumen aufnehmen und weitergeben.

Die neue Entdeckung machte eine Beschreibung der elastischen Eigenschaften einzelner Gefäßabschnitte notwendig. Es erweist sich hier als vorteilhaft, das Elastizitätsmaß nicht auf den absoluten Volumenzuwachs dV , sondern auf den relativen Zuwachs dV/V zu beziehen. Dadurch erhält man den von den Dimensionen des untersuchten Arteriensegments (Länge und Radius) unabhängigen Volumenelastizitätsmodul

$$[1,2] \quad \kappa = (dp/dV) \cdot V$$

Berechnungen von W. WEBER (1856), v. KRIES (1883) und FRANK (1926) ergaben, daß zwischen diesem Volumenelastizitätsmodul κ und der Pulswellengeschwindigkeit c ein sehr einfacher Zusammenhang besteht.

$$[1,3] \quad c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

wobei ρ die Dichte des Blutes bedeutet. Unter Modul versteht man allgemein den Quotienten aus einer „wirkenden“ Größe (Kraft, Spannung oder Druck) und der bewirkten relativen Änderung der untersuchten Dimension. In Gl. [1,2] ist die erstere der kleine Druckzuwachs dp , die letztere die relative Volumenzunahme dV/V , wobei V der Volumeninhalt des untersuchten Arteriensystems ist.

Schneidet man ein Arteriensegment der Länge nach auf, dann kann man auf das ausgebreitete Band eine Zugkraft K einwirken lassen. Wählt man als „wirkende Größe“ die auf die Querschnittseinheit im ungedehnten Zustand bezogene Kraft K/q_0 und bezieht diese auf die hierdurch erzeugte relative Längenänderung $\Delta l/l_0$, dann erhält man als Maß für die elastische Eigenschaft

der Arterienwand in der Dehnungsrichtung den sogenannten YOUNG'schen Modul

$$[1,4] \quad E^* = \frac{K}{q_0} \cdot \frac{l_0}{\Delta l}$$

Der Zusammenhang zwischen diesem Modul und dem Volumenelastizitätsmodul bzw. der Pulswellengeschwindigkeit wird nach Untersuchungen von MOENS (1876) durch die nach ihm benannte Gleichung

$$[1,5] \quad c = \text{const} \sqrt{Eh/(2r\rho)}$$

hergestellt. h ist die Wanddicke, r der Radius des Schlauchs. Const. ist ein dimensionsloser Faktor, etwa 1,0.

Hiermit ist grundsätzlich der Zusammenhang zwischen den beiden ersten und den zwei folgenden von WEBER (1851) aufgezählten Punkten hergestellt, die Eigenschaften der Arterienwand betreffen. Er bemerkt hierzu etwas resignierend: „Tertia et quarta utilitas parietis elastici arteriarum, qua cavum arteriarum dilatatum et apertum tenetur, et qua arteriae rupturae resistunt, explicatione ulteriore non indiget“.

Etwas verallgemeinernd ausgedrückt, kann man darunter die elastischen Eigenschaften der Arterienwand und die Erklärung ihres Zusammenhanges mit der histologischen Struktur verstehen und muß überdies feststellen, daß auch heute noch viele Unklarheiten in dieser Frage bestehen. Die Zahl der seither veröffentlichten Untersuchungen (Übersichten bei WEZLER u. BÖGER 1939, McDONALD 1960, BADER 1963, ATTINGER 1964) ist ebensogroß, wie die Unterschiede der erhaltenen Resultate. Dies ist zum Teil durch die von verschiedenen Autoren angewandten Methoden bedingt.

Man kann Streifen der Arterienwand durch Einwirken von Kräften in verschiedenen Richtungen oder aber Arteriensegmente durch Erhöhen des Innendrucks dehnen. Im Gegensatz zu Gummischläuchen, die sich bei Innendrucksteigerung in Längsrichtung praktisch überhaupt nicht dehnen, verlängert sich eine Arterie hierbei beträchtlich. Die relativen Längen- und Umfangszunahmen haben etwa die gleiche Größenordnung, wobei allerdings zwischen verschiedenen Arterien Unterschiede bestehen (FRANK 1926b, KRICK 1950).

In situ können sich die meisten Arterien nicht in Längsrichtung dehnen, da sie durch Bindegewebe in einer bestimmten Lage fixiert sind. Sie sind hierbei in Längsrichtung vorgehend und verkürzen sich bei Excision um etwa 30% (McDONALD 1960, BERGEL 1961, REMINGTON 1962, BADER u. KAPAL 1963). Man hat daher im Experiment zwei verschiedene Möglichkeiten, einerseits die „freie“ Dehnung des nichtfixierten Arteriensegments und andererseits die „längsfixierte“ Dehnung, wobei das Arteriensegment vor dem Versuch auf eine bestimmte, meist die in situ gegebene Länge vorgehend wird.

Die meisten Autoren bevorzugen bei ihren Untersuchungen die „freie“ Dehnung (WAGNER u. KAPAL 1951, 1952, BADER u. KAPAL 1957, SIMON u. MEYER 1958, MEYER u. SIMON 1959, KARNBAUM 1961, SCHÖNENBERGER u. MÜLLER 1960b, 1961), während andere eine Vordehnung auf die in situ gegebene Länge durchführen (BERGEL 1961, BADER u. KAPAL 1963).

Mehrmals wurde beobachtet, daß es für die Resultate von Dehnungsversuchen nicht gleichgültig ist, ob die Arterie „frei“ oder längsfixiert wird, da hierdurch die tangentielle Dehnbarkeit der Arterienwand beeinflusst wird (KRICK 1950, BERGEL 1961, REMINGTON 1962, BADER u. KAPAL 1963, KENNER 1965). Allerdings wurden bezüglich der Art der Beeinflussung widersprechende Ergebnisse mitgeteilt, so etwa, daß KRICK 1950 bei Längsdehnung eine Zunahme, REMINGTON 1962 jedoch eine Abnahme der Dehnbarkeit in tangentialer Richtung beobachtete. Messungen an Gummischläuchen ergaben überein-

stimmend, daß deren tangentielle Dehnbarkeit mit zunehmender Längsvordrehung zunimmt (BADER u. KAPAL 1960, KENNER u. WALDHÄUSL 1963). KENNER (1964b) konnte zeigen, daß der Effekt an Gummischläuchen mit Hilfe einer einfachen Elastomerentheorie berechnet werden kann.

Voraussetzung für die Analyse und Deutung dieser relativ komplizierten Dehnungsvorgänge ist die Möglichkeit, exakt definierte Größen zur Beschreibung der Elastizität der Arterien bzw. der Gummischläuche heranziehen zu können. Wie im folgenden noch ausführlich darzulegen ist, werden in der Literatur eine Reihe verschieden formulierter Elastizitätsmoduln angewandt, die bei Berechnungen und Messungen zu beträchtlich voneinander abweichenden Zahlenresultaten führen können. Dies ist als weiterer Grund für die vielfach widersprechenden Angaben über das elastische Verhalten von Arterien anzuführen (KENNER u. WETTERER 1963, WETTERER u. KENNER, im Druck).

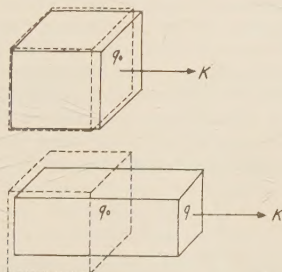


Abb. 1. Oben: Bei der Dehnung eines Festkörpers durch die Kraft K ist die Verringerung des Querschnitts q_0 sehr klein und kann bei Berechnungen vernachlässigt werden. Unten: Die starke Dehnung eines gummiartigen Körpers bewirkt infolge der Querkontraktion eine beträchtliche Verkleinerung des Querschnitts q gegenüber dem Ausgangswert q_0 . Strichliert: ungedehnter Zustand; ausgezogen: Zustand nach Dehnung.

Ferner zeigt sich, daß keines der bisher in der Literatur angewandten Modulsysteme in der Lage ist, gleichzeitig in mehreren Richtungen stattfindende Dehnung von gummiartigen, d. h. sehr dehnbaren Stoffen exakt zu beschreiben, wie dies für eine Analyse der erwähnten gegenseitigen Beeinflussung von Längs- und Tangential-Dehnung erforderlich ist (KENNER 1964a).

Die vorliegende Untersuchung stellt den Versuch dar, eine, soweit es die Anwendung auf Dehnungsversuche an Arterien und Schläuche betrifft, vollständige Theorie der Elastizitätsmoduln für hochdehnbare Stoffe aufzustellen.

Die Grundlagen der Problemstellung sollen nun an Hand einiger Abbildungen dargelegt werden.

Abb. 1 zeigt oben einen kristallinen, wenig dehnbaren Festkörper vor und nach der Einwirkung einer Kraft K . Er verlängert sich in der Zugrichtung der Kraft um die in der Abbildung übertrieben gezeichnete Strecke Δl . Senkrecht zu dieser Richtung verschmälert sich der Körper; diese Erscheinung bezeichnet man sinngemäß als Querkontraktion. Da die Dimensionsänderung gegenüber den Ausgangswerten sehr klein ist, bleibt der Querschnitt des Stücks vor und nach der Dehnung praktisch unverändert q_0 .

Anders sind die Verhältnisse bei sehr dehnbaren Stoffen, wie Gummi oder Arterienewebe. Dehnungen auf das Doppelte der Ausgangslänge sind durch relativ kleine Kräfte leicht zu erreichen. Die Querkontraktion tritt, wie in Abb. 1 unten gezeigt, stark in Erscheinung, da das Volumen des Körpers bei

Gummi (TRELOAR 1958) und Arterien Gewebe (FRANK 1906, LAWTON 1953) praktisch konstant bleibt. Der Querschnitt q nach der Dehnung unterscheidet sich sehr stark von q_0 im ungedehnten Zustand. Zweifellos kann der YOUNG'sche Modul auf Grund der Meßwerte des in Abb. 1, 2 gezeigten Versuchs berechnet werden. Es sind dies l_0 , q_0 , K und Δl . Es ist jedoch zu bedenken, daß im gedehnten Zustand die auf den Querschnitt q bezogene Spannung

$$[1,6] \quad \sigma = \frac{K}{q}$$

beträgt. Ist es sinnvoll, einen Modul nach Gl. [1,4] zu berechnen, der sich auf die Kraft im gedehnten Zustand und den Querschnitt im ungedehnten Zustand bezieht, wenn sich die Dimensionen und besonders der Querschnitt so stark verändert haben wie in Abb. 1 unten gezeigt?

FRANK (1906) hat diese Frage verneint und, an eine Untersuchung von RÖNTGEN (1876) anknüpfend, neue Moduln definiert, die das angedeutete Problem überwinden. Sie sind ähnlich dem Volumenelastizitätsmodul Gl. [1,2] aufgebaut, der je nach den Versuchsbedingungen auf einen ungedehnten Grundzustand der Arterie oder auf eine beliebige Vordehnung zu beziehen ist. In vivo etwa auf einen durch den mittleren arteriellen Druck erzeugten Dehnungszustand, von dem aus die Wirkung eines kleinen Druckzuwachses dp geprüft wird. Demnach hat auch das Volumen V in Gl. [1,2] einen größeren Wert als V_0 an einer völlig entspannten Arterie. Analog hierzu bezieht der von FRANK (1906) definierte Elastizitätsmodul

$$[1,7] \quad E = \frac{dK}{q} \cdot \frac{l}{dl}$$

kleine Kraft- und Längenzuwächse auf die durch eine beliebige vorangegangene Dehnung erreichte Dimension. Die zur Dehnung von l_0 auf l nötige (Vordehnungs-) Kraft scheint im Modul nicht auf.

Zur Erläuterung der Verhältnisse bei großen Dehnungen ist in Abb. 2 schematisch die Abhängigkeit des Längenzuwachses Δl von der Kraft K gezeigt. Der im YOUNG'schen Modul enthaltene Quotient $K/\Delta l$ entspricht der Steilheit der Sekante S . Da einerseits in diesem Modul die absolute Kraft K und andererseits der erwähnte Quotient enthalten sind, spricht man auch von einem absoluten oder einem Sekanten-Modul (WÖHLISCH et al. 1927). Der im FRANK'schen Modul Gl. [1,7] enthaltene Differentialquotient dK/dl entspricht der Steilheit der Tangente T im Punkt P . Dieser Modul wird daher auch als differentieller, relativer oder Tangentenmodul bezeichnet.

Größere als die bereits erwähnten Schwierigkeiten entstehen bei der Untersuchung gleichzeitiger Dehnungen in mehreren Richtungen. An einem durch den Innendruck p gedehnten Schlauch wirken Kräfte sowohl in Längs- als auch in Tangentialrichtung und Radialrichtung. Die Bezeichnung der Richtungen ist in Abb. 3 erklärt. Als Beispiel seien hier Spannungen in der Wand einer „frei“ dehnbaren, d. h. nicht in Längsrichtung fixierten Arterie erwähnt, die insofern einfache Relationen ergeben, als die Längsspannung genau halb so groß ist, wie die Spannung in Tangentialrichtung.

$$[1,8] \quad \sigma_1 = \frac{pr}{h}$$

ist die Tangentialspannung, während die Längsspannung

$$[1,9] \quad \sigma_2 = \frac{pr}{2h}$$

beträgt. Die mittlere Spannung in Radialrichtung

$$[1,10] \quad \sigma_3 = -\frac{p}{2}$$

hat einerseits einen negativen Wert, da sie die Arterienwand komprimiert und vereinbarungsgemäß Zugspannungen positiv und Druckspannungen negativ zu rechnen sind, und ist andererseits um den Faktor h/r kleiner als die Längsspannung. Daher kann man diese Spannung bei der Untersuchung dünnwandiger Schläuche (h/r sehr klein gegen Eins) vernachlässigen und braucht sie nicht zu berücksichtigen.

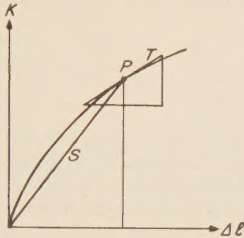


Abb. 2. Schematische Darstellung der Kraft-Längenbeziehung bei einem gummiartigen Stoff. S, Sekante, T, Tangente an Punkt P der Kurve. Beschreibung im Text.

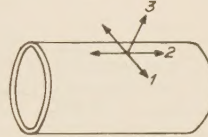


Abb. 3. Zur Bezeichnung der Richtungen (Richtungsindizes) an einem Schlauchsegment.

Das Verhältnis von Längs- zu Tangentialspannung hängt davon ab, ob der untersuchte Schlauch „frei“ dehnbar ist, oder ob er in einer bestimmten Länge fixiert ist. Infolge der Fixation treten, wie später noch ausführlich erklärt wird, zusätzliche Längskräfte bzw. Spannungen auf, die bisher in der Literatur überhaupt nicht berücksichtigt worden sind.

Aus den Gl. [1,8] bis [1,10] und der zuletzt erwähnten Überlegung folgt, daß die Dehnung der Arterienwand unter der Einwirkung des Innendrucks immer gleichzeitig in mehreren Richtungen stattfindet, gleichgültig, ob die Arterie „frei“ oder längsfixiert ist. Während es relativ einfach ist, Elastizitätsmoduln für einen Körper zu bestimmen, der nur in einer Richtung gedehnt wird, stellt die Beschreibung der immer in mehreren Richtungen stattfindenden Dehnung von Schläuchen und Arterien wesentlich höhere Ansprüche an die Definition eines Elastizitätsmoduls. Diese Beschreibung mehrdimensionaler Dehnungen bedeutet kein großes Problem, wenn die Elongationen sehr klein sind, wie dies in der Kristallphysik der Fall ist. Unter Außerachtlassung der beträchtlichen Dehnbarkeit der Arterienwand und trotz der schon von FRANK (1906) erhobenen Bedenken wird wohl aus Gründen der Einfachheit vielfach auch heute noch das YOUNGSche Modulsystem zur Beschreibung der Arteriendehnbarkeit angewandt.

Diese Anwendung sowie unklar formulierte Moduldefinitionen, wie z. B. der „incremental modulus“ von LOVE (1927) bei BERGEL (1961), können, wie KENNER u. WETTERER (1963), LEWIS u. SCHAPER (1964) und WETTERER u. KENNER zeigten, zu stark voneinander abweichenden Resultaten führen. Nur selten sind daher Modulangaben in der Literatur miteinander vergleichbar. Abgesehen von grundsätzlichen Fehlanwendungen muß man bei allen Modulangaben die Vielzahl der möglichen Definitionen berücksichtigen, wofür Gl. [1,4], [1,7] und [1,11] Beispiele sind. In der anglo-amerikanischen Literatur werden alle Moduln meist ohne genaue Angabe der Definition und der Anwendung als „Young's modulus“ bezeichnet. Im Ergebnis sind somit meist Unklarheiten der berechneten Modulwerte von mindestens $\pm 10\%$ zu berücksichtigen, die allein auf der Verwirrung und vielfach auch Vermengung verschiedener Definitionen und nicht auf Messungsungenauigkeiten beruhen (WETTERER u. KENNER, im Druck).

FRANK (1906) hat zwar bereits den Weg, der all diese Schwierigkeiten zu umgehen gestattet, richtig erkannt. Es ist ihm jedoch nicht gelungen, eine vollständige Theorie der Elastizitätsmoduln für stark dehnbare Stoffe aufzustellen. Schon 1920 hat er eine wichtige und merkwürdige Eigenschaft seiner Moduln übersehen, auf die KENNER u. WETTERER (1963) bei der Nachprüfung der FRANKschen Untersuchungen aufmerksam wurden. Diese

besteht darin, daß bei großen Dehnungen, wie aus Gl. [1,6] zu ersehen ist, wegen der beträchtlichen Veränderlichkeit des Materialquerschnitts Kräfte und Spannungen ein stark unterschiedliches Verhalten zeigen. Einerseits wird dadurch die Brauchbarkeit der YOUNG'schen Moduln zur Beschreibung großer Dehnungen, wie erwähnt, sehr eingeschränkt. Andererseits ergeben sich zwei gleichwertige, aber in ihrer Definition und ihrem Verhalten unterschiedliche FRANK'sche „Modulsysteme“, ein „kraftbezogenes“ und ein „spannungsbezogenes“ System. Die Definition des kraft bezogenen Moduls wurde in Gl. [1,7] gegeben. Jene des spannungsbezogenen Moduls*) lautet:

$$[1,11] \quad \epsilon = d\sigma \frac{1}{dt}$$

FRANK selbst hat diesen Modul 1920 definiert und angewendet, da er, wie sich später ergeben wird, unter gewissen Voraussetzungen einfacher handzuhaben ist als der Modul E . Jedoch hat er den Unterschied gegenüber seinem 1906 definierten Modul E nicht bemerkt oder ihn übersehen. Auf jeden Fall hat er nicht auf die daraus folgenden Konsequenzen geachtet.

Die folgende Untersuchung enthält eine Analyse des YOUNG'schen Moduls und seines Anwendungsbereichs, eine Kritik der FRANK'schen Theorie sowie eine exakte Ableitung der differentiellen Moduln für die Anwendung zur Beschreibung der Arterienelastizität. Diese Theorie ermöglicht vor allem auch eine Beschreibung von gleichzeitig in mehreren Richtungen stattfindenden Dehnungen, die von der ursprünglichen FRANK'schen Theorie nicht bzw. nur ungenügend erfaßt werden konnten. Außerdem werden die angedeuteten Zusammenhänge zwischen diesen Moduln und dem Volumenelastizitätsmodul und der Pulswellengeschwindigkeit untersucht. Aus der experimentellen Anwendung dieser Theorie ergeben sich schließlich neue Anhaltspunkte über die Beziehung zwischen Struktur und Elastizität der Arterien.

2. Größenordnungen

Inhalt: Ein Vergleich zwischen der Kristallelastizität und der Elastizität sehr dehnbarer „gummiartiger“ Stoffe zeigt, daß die Unterschiede eine Größenordnung von 10^5 bis 10^6 haben.

Um eine Vorstellung von dem Unterschied zwischen der Kristallelastizität und der Elastizität von Gummi und Arterienwandgewebe zu vermitteln, ist in Abb. 4 die Dehnungskurve eines 10 cm langen Gummistreifens mit dem Ausgangsquerschnitt $q_0 = 1 \text{ mm}^2$ dargestellt.

Die in der Arterienwand unter physiologischen Bedingungen wirkenden Spannungen haben die Größenordnung von 10^6 bis $2 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$. Eine solche Spannung kann in dem beschriebenen Gummiband durch Belastung mit einem Gewicht von 10 bis 20 g erzeugt werden und bewirkt eine Dehnung um 10 bis 20% der Ausgangslänge. Diese Belastung würde an einem gleichdimensionierten Eisendraht eine Längenänderung von weniger als $0,1 \mu$ bewirken. Die Messung einer derartig geringen Längenänderung wäre mit einem Lichtmikroskop unmöglich, da sie an der untersten Grenze der Auflösbarkeit liegt.

*) Von KENNER u. WETTERER wurde dieser Modul mit E_1 bezeichnet. Dies ist nicht sehr zweckmäßig, weshalb hier ein neues Symbol (ϵ) verwendet wird.

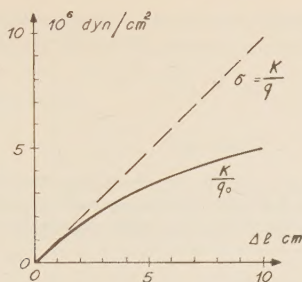


Abb. 4. Beziehung zwischen Spannung (strichliert) bzw. auf den Ausgangsquerschnitt $q_0 \approx 1 \text{ mm}^2$ bezogener Kraft (ausgezogen) zur Längenänderung bei einem Gummiband mit der Ausgangslänge $l_0 = 10 \text{ cm}$. Die beiden Kurven divergieren mit zunehmender Dehnung.

Die Unterschiede der Dehnbarkeit und daher auch der Elastizitätsmoduln zwischen gummiartigen Stoffen und Festkörpern haben die Größenordnung 10^5 bis 10^6 . Wenn man zudem bedenkt, daß bei dem erwähnten Versuch an einem Metalldraht erst eine Kraft von 10 kp (entsprechend einer Belastung mit einem Gewicht von 10 kg) eine Längenänderung von etwa $1/1000$ bewirkt, dann kann man als Charakteristikum der Kristallelastizität bezeichnen, daß dort immer nur sehr kleine Elongationen

$$[2,1] \quad \frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$$

auftreten. Hingegen muß sich eine Theorie endlicher, d. h. sehr großer Dehnungen mit Elongationen der Größenordnung

$$[2,2] \quad \frac{\Delta l}{l_0} \approx 0,1 \text{ bis } > 1$$

befassen. Dieser Unterschied ist die wichtigste Grundlage der folgenden Betrachtungen. Seine Außerachtlassung kann zu beträchtlichen Fehlschlüssen führen.

Jede Elastizitätstheorie befaßt sich mit Funktionen der Art

$$[2,3] \quad l = f(K)$$

oder

$$[2,4] \quad l = \varphi(\sigma)$$

Ohne vorerst auf diese Gleichungen näher einzugehen, sehen wir aus dem oben erwähnten Versuch folgendes. Zunächst wurden an dem Material die Ruhelänge l_0 und der Ausgangsquerschnitt q_0 gemessen. Durch die Einwirkung der Kraft K wird die Länge auf $l = l_0 + \Delta l$ erhöht und der Querschnitt im allgemeinen auf $q = q_0 - \Delta q$ verringert. Es sind also mindestens 5 Angaben notwendig, um eine Aussage über das elastische Verhalten eines Stoffes zu erhalten. Dies ist in der folgenden Übersicht zusammengefaßt.

	Kraft:	0	K
[2,5]	Länge:	l_0	$l = l_0 + \Delta l$
	Querschnitt:	q_0	$q = q_0 - \Delta q$

Daraus kann nun die Spannung berechnet werden, sie beträgt im Zustand der Dehnung durch die Kraft K :

$$[2,6] \quad \sigma = \frac{K}{q} = \frac{K}{q_0 - \Delta q}$$

Über die Querschnittsänderung Δq erhält man einen Anhaltspunkt, wenn man aus den Meßwerten das Volumen des Stoffes bestimmt. Dieses beträgt im ungedehnten Ausgangszustand

$$[2,7] \quad V_{W0} = l_0 q_0$$

und im gedehnten Zustand

$$[2,8] \quad V_W = l q$$

Man kann sich im allgemeinen auf den Sonderfall beschränken, daß das Volumen bei der Dehnung konstant bleibt, wie dies bei Gummi und Arterien gewebe sehr genau der Fall ist (FRANK 1906, LAWTON 1953, TRELOAR 1958). Es ist also $V_{W0} = V_W$ zu setzen und daher folgt

$$[2,9] \quad q = q_0 \frac{l_0}{l} = q_0 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}}$$

Wenn man nun die Voraussetzung [1,1] für die Theorie der Kristallelastizität anwendet, kann man $\Delta l/l_0$ im Nenner der Gl. [2,9] gegenüber 1 vernachlässigen und erhält daher

$$[2,10] \quad q \cong q_0 \text{ und } \Delta q \cong 0$$

Das bedeutet, daß im Meßbereich Kraft und Spannung proportional sind, da die dehnungsbedingte Veränderung des Materialquerschnitts wegen ihrer außerordentlichen Kleinheit vernachlässigt werden kann.

Bei endlichen Dehnungen, Voraussetzung [2,2], ist die beträchtliche Abweichung der Spannung K/q von der auf den Ausgangsquerschnitt bezogenen Kraft K/q in Abb. 4 deutlich zu erkennen. Dieser Unterschied erklärt auch, warum ein Dehnungsvorgang durch zwei gleichberechtigte Gl. (Gl. [2,3] bzw. [2,4]) beschrieben werden kann. Für endliche Dehnungen ist somit charakteristisch, daß die Funktionen [2,3] und [2,4] meßbar voneinander abweichen. Diese Qualität beinhaltet etwas Auffälliges. Für den Zustand des gedehnten Materials ist die Spannung σ maßgebend. Diese Spannung ist jedoch einer unmittelbaren Messung nicht zugänglich, sondern benötigt immer zwei Messungen, jene der Kraft und jene des Materialquerschnitts. Man kann an Hand der Abb. 2,1 und der oben erwähnten Gleichungen auch sagen: Beobachtet wird die Länge als Funktion einer angreifenden Kraft K (Gl. [2,3]), während für das Verhalten des Materials die Spannung, d. h. die auf die Einheit des Materialquerschnitts wirkende Kraft K/q (Gl. [2,4]) maßgebend ist.

3. Hookesches Gesetz, Youngscher Modul und Querkontraktionszahl

Inhalt: Sehr kleine Dehnungen und Proportionalität von Kraft und Längenänderung sind Voraussetzung für die Anwendung der auf die Ausgangswerte bezogenen Definitionen des Youngschen Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Kontraktionszahl. Die letztere beschreibt die Verschmälerung eines Stoffes bei Längsdehnung. Bei Anwendung auf größere Dehnungen treten physikalisch absurde Resultate auf.

Im vorangehenden Abschnitt hat sich ergeben, daß bei sehr kleinen Dehnungen ($\Delta l/l_0 \ll 1$) die auf den Ruhequerschnitt bezogene Kraft K/q_0 gleich der Spannung σ gesetzt werden kann. Experimente an Kristallen und Festkörpern haben ferner ergeben, daß die dehnende Kraft im reversiblen Dehnungsbereich bei diesen Materialien der bewirkten Elongation proportional ist. Diese Erfahrungsregel wird als HOOKESCHES Gesetz bezeichnet.

Diese beiden Bedingungen erlauben, die elastischen Eigenschaften eines Festkörpers in Dehnungsrichtung mit Hilfe eines einzigen Faktors, des YOUNG'schen Moduls auszudrücken, der mit dem Symbol E^* bezeichnet werden soll (KENNER u. WETTERER 1963).

$$[3,1] \quad E^* = \frac{K}{q_0} \cdot \frac{l_0}{\Delta l}$$

Es ist evident, daß dieser Modul, in dem die Kraft als unabhängige Variable steht, auf Gl. [2,3] zurückgeht. Geht man andererseits von Gl. [2,4] aus, dann erhält man einen Modul, der durch die Gleichung

$$[3,2] \quad E^{(*)} = \sigma \frac{l_0}{\Delta l}$$

zu definieren ist. Aus dem Gesagten ergibt sich ohne weiteres, daß die Moduln 3,1 und 3,2 unter der Voraussetzung ($\Delta l/l_0 \ll 1$) identisch sind. Bei der Anwendung auf endliche Dehnungen ergeben sich allerdings beträchtliche Unterschiede (KENNER u. WETTERER 1963, LEWI u. SCHAPER 1964). Da hierauf nie geachtet wurde, scheinen die erwähnten Unterschiede erst in den Meßresultaten auf, je nachdem, welche der beiden Definitionen [3,1] oder [3,2] der betreffende Autor für seine Berechnungen anwandte.

Der Anwendung dieser Moduln auf endliche Dehnungen stünden bei Beachtung der Dualität keine logischen Schwierigkeiten entgegen, wenn man sich auf die Untersuchung eindimensionaler Dehnungen beschränkte. Wenn bei großen Elongationen die beiden Moduln beträchtlich voneinander abweichen, so sind doch alle Größen zu ihrer Ermittlung eindeutig meßbar.

Bei mehrdimensionalen Dehnungen ist dies nicht der Fall. Um diese neuen Schwierigkeiten verständlich zu machen, soll zunächst auf die gleichzeitige Dehnung in mehreren Richtungen unter der Voraussetzung $\Delta l/l_0 \ll 1$ näher eingegangen werden. Wir bezeichnen die 3 Richtungen im Raum mit 1, 2, 3 und untersuchen die Auswirkungen verschiedener Kräfte auf die Länge l_i .

Eine Kraft in dieser Richtung bewirkt eine Verlängerung um Δl_i . Ob eine zusätzliche Dehnung in Richt. 2 oder 3 einen Einfluß auf l_i hat, hängt von bestimmten Eigenschaften des Materials ab. Es handelt sich dabei um eine Art „Kopplung“ zwischen den Dehnungen in verschiedenen Richtungen. Die Größe der Kopplung kann durch die sogenannte Poisson'sche Querkontraktionszahl ausgedrückt werden. Diese ist durch das Verhältnis der relativen Längenänderungen definiert.

$$[3,3] \quad \mu^*_{ik} = - (\Delta l_i/l_i) / (\Delta l_k/l_k)$$

Die Indices deuten an, daß diese Querkontraktionszahl die Auswirkung einer in Richtung k wirkenden Kraft bzw. Längenänderung auf die Länge in Richtung i beschreibt, die zu k senkrecht steht. Das Vorzeichen ist negativ, da eine Verlängerung in Richtung k im allgemeinen eine Verkürzung in Richtung i , eben die Querkontraktion bewirkt. Ist die Querkontraktionszahl Null, dann fehlt zwischen den Richtungen k und i eine Kopplung.

Folgende Überlegung hat zu der auch in den Lehrbüchern der Physik vertretenen Annahme geführt, daß bei Volumenkonstanz jede Querkontraktionszahl 0,5 sein müsse. Aus

$$[3,4] \quad V_W = l_1 l_2 l_3 = \text{const}$$

folgt unter Berücksichtigung von $\Delta l/l_0 \ll 1$ für sehr kleine Dehnungen und durch Vergleich mit der Definition [3,3]:

$$[3,5] \quad \mu^*_{12} + \mu^*_{32} = 1$$

Sofern sich das untersuchte Material in allen Richtungen gleichartig (— isotrop) verhält, ergibt sich daraus tatsächlich

$$[3,6] \quad \mu^*_{12} = \mu^*_{32} = 0,5$$

Auf die Frage, ob die seit FRANK (1906) als gerechtfertigt angenommene Annahme richtig ist, daß auch in der inkompressiblen und demnach volumenkonstanten Arterienwand $\mu^* = 0,5$ sei, wird in der Folge noch wiederholt eingegangen werden. Es kann vorweggenommen werden, daß dies nicht der Fall ist.

Am Beispiel der Querkontraktionszahl kann man nun die Schwierigkeiten demonstrieren, die auftreten, wenn man die Definitionen der Kristallelastizität, die auf Vorschlag von KENNER u. WETTERER mit einem Sternchen gekennzeichnet werden, zur Beschreibung endlicher Dehnungen anwendet. Wenn man den inkompressiblen, volumenkonstanten Gummi als Beispiel wählt und annimmt, daß laut Lehrbuch und obiger Ableitung $\mu^* = 0,5$ in allen Richtungen sei, dann folgt bei Dehnung in Längsrichtung (Richtung 1) die Veränderung der Breitendimension l_i (Richtung 2 oder 3) aus Gl. [3,3]:

$$[3,7] \quad 0,5 = - \frac{l_i - l_{i0}}{l_{i0}} \cdot \frac{l_{10}}{l_1 - l_{10}}$$

und daraus

$$[3,8] \quad l_i = l_{i0} \frac{3 l_{10} - l_1}{2 l_{10}}$$

Unter den erwähnten Annahmen, die auch heute noch manchen physiologischen Arbeiten über Arteriendehnbarkeit zugrundegelegt werden, würde also die Breite des Gummistreifens bei Dehnung auf das 3fache der Ausgangslänge zu Null und bei noch größeren Dehnungen negativ werden, was natürlich physikalisch unsinnig ist. Man kann sich leicht vergewissern, daß ein Gummiband auf mehr als das Vierfache seiner Ausgangslänge gedehnt werden kann und dann immer noch eine durchaus merkbare positive Breite hat; unter der Voraussetzung einer genauen Volumenkonstanz beträgt dann die Breite gerade die Hälfte der Ausgangsbreite, wie man aus [3,4] entnehmen kann.

Es ist offensichtlich, daß bei endlichen Dehnungen auch unter einfachsten Voraussetzungen die Querkontraktionszahl nach der Definition [3,3] nicht als Konstante angesehen werden darf. Man muß bei der Anwendung der Definitionen der Kristallelastizität bei endlichen Dehnungen damit rechnen, daß anstelle von Konstanten komplizierte dehnungsabhängige Funktionen in den Gleichungen auftreten. So wäre im obigen Zahlenbeispiel der Dehnung auf das Vierfache der Ausgangslänge unter Voraussetzung von Volumenkonstanz und Isotropie des Materials

$$[3,9] \quad \frac{\Delta l_1}{l_{10}} = 3, \quad - \frac{\Delta l_i}{l_{i0}} = 0,5 \quad \text{und daher} \quad \mu^*_{i1} = 0,17$$

Dies weicht sehr beträchtlich von der Annahme der Gl. [3,6] ab.

Einso wie das Resultat der Gl. [3,7] und [3,8] kommt das paradoxe Ergebnis in [3,9] dadurch zustande, daß Definitionen, die ausschließlich zur Anwendung auf sehr kleine Dehnungen bestimmt sind, auf endliche Dehnung angewandt werden. Nicht immer springen die Fehler so sehr in die Augen. Daher ist es verständlich, daß auch heute noch die Definitionen des YOUNGSchen Modulsystems zur Beschreibung der Arterienelastizität angewandt werden (MÜLLER 1927, SCHÖNENBERGER u. MÜLLER 1960b, 1961, HARDUNG 1964a und b).

4. Gleichungssysteme für mehrdimensionale Dehnungen

Inhalt: Für jede der 3 räumlichen Dimensionen eines Stoffes existiert je eine Dehnungsgleichung. Jede dieser Gleichungen beschreibt die Wirkung der 3 Kräfte auf eine Länge. Die Koeffizienten der Kräfte können in einer Tabelle zusammengefaßt werden, die als

Matrix bezeichnet wird. Bei Volumenkonstanz des Materials weisen die Koeffizienten der Kräfte charakteristische Beziehungen auf.

Die Grundlagen der Elastizitätstheorie für anisotrope Stoffe unter der Voraussetzung sehr kleiner Dehnungen sind in der Physik bereits lange bekannt und wurden auch von FRANK (1929) kurz diskutiert. Eine Übersicht im Hinblick auf die Messung der Arterienelastizität wurde in letzter Zeit von HARDUNG (1964a und b) veröffentlicht.

Aus der Darstellung über die Wirkung und Wechselwirkung der Dehnungen in verschiedenen Richtungen wird das folgende Schema über die Zusammenhänge der drei Spannungen σ_1 bis σ_3 und der drei Längen bzw. relativen Längenänderungen ohne weiteres verständlich.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta l_1}{l_1} &= A_1 \sigma_1 - \mu_{12}^* A_2 \sigma_2 - \mu_{13}^* A_3 \sigma_3 \\
 [4,1] \quad \frac{\Delta l_2}{l_2} &= -\mu_{21}^* A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 - \mu_{23}^* A_3 \sigma_3 \\
 \frac{\Delta l_3}{l_3} &= -\mu_{31}^* A_1 \sigma_1 - \mu_{32}^* A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3
 \end{aligned}$$

Hierin werden die reziproken YOUNG'schen Moduln zur Vereinfachung der Schreibweise durch

$$[4,2] \quad A_k = \frac{1}{E_k^*}$$

abgekürzt. μ_{ik}^* sind die Querkontraktionszahlen. k nennt man den Spaltenindex, i den Zeilenindex, wie aus den Gl. [4,1] hervorgeht.

Der wichtigste und einfachste Sonderfall, die Volumenkonstanz, führt unter der Voraussetzung $\Delta l/l_0 \ll 1$ zu der Bedingung

$$[4,3] \quad \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3} = 0$$

die anschaulich verständlich ist, da bei Volumenkonstanz jede Dehnung in Richtung 1 eine Verkürzung, also negative Δl_i in Richtung 2 und 3 bewirkt. Addiert man die 3 Gl. [4,1], dann muß also sowohl die linksstehende Summe Gl. [4,3] als auch die rechtsstehende Null sein. Da dieses Resultat unabhängig von der Größe der jeweils wirkenden Spannungen sein muß, folgt, daß nicht nur die Gesamtsumme der rechten Seite, sondern auch die Summe jeder der 3 in einer Spalte untereinander stehenden Glieder der Gl. [4,1] Null sein müssen.

Man kann ferner annehmen, daß die Gl. [4,1] auch richtig sein müssen, wenn alle drei Spannungen gleich groß sind. Wenn dieser Fall eintritt, wie etwa bei allseitiger Kompression durch Druckerhöhung, ändert sich an den Dimensionen des untersuchten Stoffes gegenüber der Ausgangslage infolge der geforderten Volumenkonstanz gar nichts. Also ist dann

$$[4,4] \quad \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{\Delta l_3}{l_3} = 0$$

Daraus folgt, wie aus den Gl. [4,1] zu ersehen ist, wenn man $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ setzt, daß auch die in einer Zeile stehenden Koeffizienten der Spannungen die Summe Null ergeben müssen.

Man erhält also aus der Annahme der Volumenkonstanz Folgerungen über das Verhalten der Spannungskoeffizienten, die in dem folgenden Schema angeschrieben sind. Diese Tab. oder Matrix der Koeffizienten besteht aus ebenso vielen Zeilen wie Spalten (je 3) wird daher als quadratisch bezeichnet; die darin enthaltenen Koeffizienten sind die Elemente der Matrix.

$$[4,5] \quad M_A = \begin{pmatrix} A_1 & -\mu_{12}^* A_2 & -\mu_{13}^* A_3 \\ -\mu_{21}^* A_1 & A_2 & -\mu_{23}^* A_3 \\ -\mu_{31}^* A_1 & -\mu_{32}^* A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

Auf Grund der oben dargestellten Überlegungen folgt, daß bei Volumenkonstanz sowohl die Summe der Spaltenelemente als auch die Summe der Zeilenelemente der Matrix [4,5] Null sein muß. Wenn man diese 6 Summen bildet und Null-setzt, erhält man die folgenden wichtigen Beziehungen (Gl. [4,6] bis [4,8]). Es kann wohl darauf verzichtet werden, die elementaren Berechnungen hier ausführlich zu beschreiben. Als Resultat erhält man zunächst 3 Beziehungen zwischen den Querkontraktionszahlen

$$[4,6] \quad \begin{aligned} \mu_{21}^* + \mu_{31}^* &= 1 \\ \mu_{12}^* + \mu_{32}^* &= 1 \\ \mu_{13}^* + \mu_{23}^* &= 1 \end{aligned}$$

Die zweite dieser drei Gl. wurde bereits in Abschnitt 3 auf anderem Wege erhalten. Zwischen den in der Matrix [4,5] stehenden Elementen ergeben sich die Gl.

$$[4,7] \quad \begin{aligned} \mu_{12}^* A_2 &= \mu_{21}^* A_1 \\ \mu_{13}^* A_3 &= \mu_{31}^* A_1 \\ \mu_{23}^* A_3 &= \mu_{32}^* A_2 \end{aligned}$$

Ein Blick auf die Matrix [4,5] zeigt, daß somit je zwei schräg gegenüber stehende Elemente (rechts oben – links unten) gleich sind. Die Koeffizientenmatrix der Gl. [4,1] ist also für einen volumenkonstanten Körper „symmetrisch“.

Ferner erhält man die Beziehungen

$$[4,8] \quad \begin{aligned} 2 \mu_{12}^* A_2 &= A_1 + A_2 - A_3 \\ 2 \mu_{13}^* A_3 &= A_1 - A_2 + A_3 \\ 2 \mu_{23}^* A_3 &= -A_1 + A_2 + A_3 \end{aligned}$$

Diese 3 Gleichungen können auf Grund der Symmetrie der Matrix (Gl. [4,7]) noch durch 3 weitere auf 6 ergänzt werden. Hierbei ergibt sich die interessante Tatsache, daß die 9 Elemente der Matrix durch die Bestimmung der 3 (reziprok geschriebenen) Moduln A_1 , A_2 und A_3 in den Hauptrichtungen festgelegt werden können.

Zuletzt sei noch erwähnt, daß man auch die Elongationen und die Spannungen in Matrizen zusammenfassen kann. Die 3 Gl. [4,1] lauten in Matrizenform symbolisch:

$$[4,9] \quad \left(\frac{\Delta l_k}{l_k} \right) = M_A (\sigma_k)$$

Die Rechnung mit Matrizen, die weiter unten angewandt wird, bietet abgesehen von der Raumersparnis eine Reihe formaler Vereinfachungen. Alles, was mit Matrizenrechnung zu errechnen ist, kann auch in der üblichen elementaren Rechenweise, wenn auch umständlicher, erhalten werden. Bezüglich der Rechenregeln muß auf Lehrbücher der Mathematik verwiesen werden.

5. Das Dehnungspotential

Inhalt: Die zur Dehnung eines elastischen Stoffes notwendige Arbeit ist gleich der potentiellen Energie, die im gedehnten Stoff gespeichert ist. Diese potentielle Energie oder „Potential“ ist unabhängig von der Reihenfolge mehrerer Dehnungen und charakterisiert den erreichten Dehnungszustand.

Eine andere Betrachtungsweise, deren Zusammenhang mit der bisher dargestellten später ersichtlich wird, führt zu der folgenden Überlegung. Ein Stück Gummi soll zunächst in Richtung 1 gedehnt werden. Hierzu ist eine gewisse Arbeit notwendig. Dasselbe gilt für die nachfolgenden zusätzlichen Dehnungen in Richtung 2 und 3. Die gesamte Arbeit, die zu dieser Dehnung in 3 Stufen aufgewendet wurde, ist gleich der potentiellen Energie, die am Ende des ganzen Vorganges in dem gedehnten Gummi enthalten ist. Es muß hierbei gleichgültig sein, auf welchem Wege der Endzustand erreicht wurde, ob also die Dehnungen in der Reihenfolge 1, 2, 3 oder 3, 2, 1 oder auf komplizierteren Umwegen durchgeführt wurden.

Wird dem Ausgangszustand mit den Längen l_{10} , l_{20} , l_{30} die Energie bzw. das Potential Null zugeschrieben, so enthält der gedehnte Stoff im Endzustand eine potentielle Energie U , die allein von den durch die Dehnungen erreichten Dimensionen l_1 , l_2 und l_3 sowie den Materialeigenschaften, jedoch nicht vom „Dehnungsweg“ abhängt. Man kann diese Tatsache mathematisch so ausdrücken, daß für jeden Stoff unabhängig davon, ob er wenig oder sehr dehnbar und ob er volumenkonstant ist oder nicht, eine Funktion

$$[5,1] \quad U = U(l_1, l_2, l_3)$$

existiert, die jeder möglichen Kombination von Dehnungen ein bestimmtes Potential, d. h. eine bestimmte Energie zuschreibt (vgl. z. B. TRELOAR 1958). Dieser Begriff des Dehnungspotentials ist analog dem in der Elektrostatik angewandten Potentialbegriff.

Es ergibt sich nun im Anschluß an Abschnitt 4, daß bei einem inkompressiblen, also volumenkonstanten Körper zu den schon abgeleiteten Einschränkungen auch gewisse Vorschriften über das Dehnungspotential gelten. Denn es muß wegen der Volumenkonstanz immer

$$[5,2] \quad V_W = l_1 l_2 l_3 = \text{const}$$

sein, woraus sich durch Auflösen nach l_3 die Beziehung

$$[5,3] \quad l_3 = \frac{V_W}{l_1 l_2}$$

ergibt. Wenn also z. B. über l_1 und l_2 verfügt wurde, ist l_3 festgelegt. Das Potential eines volumenkonstanten Körpers hängt daher nur von zwei Längen ab, während das Verhalten der 3. Länge durch Gl. [5,3] bestimmt ist. Welche der 3 Längen man als unabhängige und welche als abhängige wählt, ist vom mathematischen Standpunkt gleichgültig. Wie in Abschnitt 1 angedeutet, spielen bei Berechnungen an Schläuchen und Arterien Veränderungen in radialer Richtung, d. h. in Richtung 3 eine untergeordnete Rolle. Daher ist es nahelegend, das Potential als Funktion von l_1 und l_2 anzuschreiben und l_3 als abhängige Dimension zu deklarieren.

Da das Potential U eindeutig aus den Dehnungen eines Stoffes bestimmt werden kann, ist auch umgekehrt anzunehmen, daß die Eigenschaften eines elastischen Körpers eindeutig durch sein Potential ausgedrückt werden können. Diesen Zusammenhang muß man vor allem bei der Untersuchung komplizierter Dehnungen an sehr dehnbaren Stoffen beobachten.

Während für sehr kleine Dehnungen volumenkonstanter Körper die in Abschnitt 4 abgeleiteten Beziehungen zwischen den Moduln und Querkontraktionszahlen die Existenz eines Potentials beweisen, ist dies bei sehr großen Dehnungen nicht der Fall. Wie in Abschnitt 9 gezeigt wird, müssen bei der Berech-

nung stark dehnbarer Stoffe besondere Bedingungen erfüllt werden, damit die Existenz eines Potentials gesichert ist. Welche Fehler auftreten können, wenn Dehnungsgleichungen unter Außerachtlassung der erwähnten Beziehungen zu einem eindeutigen Dehnungspotential aufgestellt werden, wird sich ebenfalls in den folgenden Abschnitten ergeben.

6. Experiment und Modell

Inhalt: Die Außerachtlassung der in den vorangehenden Abschnitten besprochenen Bedingungen kann bei Berechnungen zu Widersprüchen führen. Modellrechnungen mit willkürlich gewählten Modulwerten können paradoxe Resultate ergeben, während die Ergebnisse des sachgerecht durchgeführten Experiments immer physikalisch sinnvoll sein müssen.

Wenn man an einem Schlauch experimentiert, können die erhaltenen Meßwerte nicht im Widerspruch zu den Eigenschaften des Materials stehen. Man kann sich allerdings leicht in Widersprüche verwickeln und zu absurden Resultaten gelangen, wenn man unter Außerachtlassung der vielseitigen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Dehnungsgleichungen Berechnungen über das Verhalten von Schläuchen bzw. elastischen Körpern anstellt.

Die folgende Diskussion, die sich formal weiterhin an die Voraussetzung sehr kleiner Dehnungen $\Delta l/l_0 \ll 1$ hält, ist grundsätzlich auch für die Beziehungen der FRANKSchen Theorie der endlichen Dehnungen in der weiter unten abgeleiteten exakten Formulierung gültig (Abschnitt 9).

Aus theoretischen Überlegungen und Experimenten an Arterien sind schon lange zwei Tatsachen bekannt (FRANK 1906, 1920, 1926 b und 1929):

- a. Das Wandvolumen V_W von Arterien ist wegen des großen Wassergehalts praktisch inkompressibel und verändert sich daher nicht bei Dehnungen.
- b. Die Dehnbarkeit von Arterien ist in Tangentialrichtung deutlich geringer als in Längsrichtung.

Die erste Tatsache hat zu der bisher allgemein akzeptierten Annahme geführt, die Querkontraktionszahl der Arterienwand sei in allen Richtungen gleich 0,5. Die höhere Dehnbarkeit in Längsrichtung hat zur Folge, daß E^*_1 größer als E^*_2 (bzw. in reziproker Schreibweise A_1 kleiner als A_2) sein muß. Die beiden Annahmen führen auf einen Widerspruch, da nach Gl. [4,7] unter Voraussetzung von $\mu^*_{12} = \mu^*_{21} = 0,5$ auch $A_1 = A_2$ bzw. $E^*_1 = E^*_2$ sein muß.

Auf diese Bedingung ist seit FRANK nicht geachtet worden. Erst FAUCETT (1957) und später HARDUNG (1964 a und b) haben die Beziehungen, wie sie in Abschnitt 4 beschrieben sind, theoretisch richtig beachtet. Der Nachweis, daß analoge Beziehungen auch für die weiter unten besprochenen FRANKSchen Moduln gelten, und die experimentelle Bestätigung, daß die Querkontraktionszahlen in der Arterienwand beträchtlich von 0,5 abweichen, konnte zuerst von KENNER (1964 a, 1965) und KENNER u. WALDHÄUSL (1964) erbracht werden.

Um die Verhältnisse an einem „frei“ dehnbaren, nicht fixierten dünnwandigen Schlauch zu besprechen, ist zu beachten, daß die Spannung σ_2 in Längsrichtung halb so groß ist, wie die Spannung σ_1 in Tangentialrichtung. Die Spannung σ_3 in radialer Richtung kann demgegenüber ganz vernachlässigt werden (vgl. FRANK 1920, HARDUNG 1964, Abschnitt 1). Die Dehnungen des Schlauchs sind also durch folgende Gleichungen gegeben, die sich aus Gl. [4,1] unter Berücksichtigung der eben erwähnten Zusammenhänge ergeben:

$$[6,1] \quad \begin{aligned} \frac{\Delta r}{r} &= \frac{\Delta l_1}{l_1} = \sigma_1 (A_1 - \mu_{12}^* A_2/2) \\ \frac{\Delta l}{l} &= \frac{\Delta l_2}{l_2} = \sigma_1 (-\mu_{21}^* A_1 + A_2/2) \end{aligned}$$

Hinsichtlich der angewendeten Symbole vergl. auch die im Anhang zusammengefaßte Übersicht.

Für die Spannung ist

$$[6,2] \quad \sigma_1 = \frac{pr}{h} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

einzusetzen. Es sei angenommen, daß die Schlauchwand inkompressibel ist. Die relative Änderung des Schlauchinnenvolumens bei Erhöhung des Innendrucks von Null auf p beträgt

$$[6,3] \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta r}{r} = \frac{pr}{h} \left[A_1 (2 - \mu_{21}^*) + A_2 \left(\frac{1}{2} - \mu_{12}^* \right) \right]$$

Die inkorrekte Annahme $\mu_{12}^* = \mu_{21}^* = 0,5$ würde zu folgendem Resultat führen:

$$[6,4] \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{h} \cdot \frac{3 A_1}{2}$$

Hiernach wäre die Änderung des Innenvolumens völlig unabhängig von der Dehnbarkeit des Schlauchs in Längsrichtung.

Durch Anwendung von Gl. [4,7] kann man Gl. [6,3] noch vereinfachen und erhält das korrekte Resultat

$$[6,5] \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{h} (2 A_1 (1 - \mu_{21}^*) + A_2/2)$$

Da A_2 in der falschen Berechnung von Gl. [6,4] überhaupt nicht auftritt, bei Arterien jedoch größer als A_1 ist, kann der Fehler sehr beträchtlich sein. Wie später an Hand von Experimenten gezeigt wird, hat die in Gl. [6,5] enthaltene Querkontraktionszahl im Bereich der hier besprochenen sehr kleinen Dehnungen Werte von weniger als 0,5. Durch Berücksichtigung der Beziehungen [4,7] und [4,8] kann man Gl. [6,3] auch in der folgenden Form anschreiben:

$$[6,6] \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{h} (A_1 + A_3 - A_2/2)$$

HARDUNG (1964b), der die Gleichung in dieser Form anschreibt, glaubt daraus schließen zu können, daß eine beträchtliche Anisotropie nicht mit Volumenkonstanz des Materials vereinbar sei; denn es sei nicht vorstellbar, daß ein Druckanstieg p im Schlauch dessen Innenvolumen V verkleinern könne. Deshalb müsse ΔV immer positiv sein, was jedoch nach Gl. [6,6] nicht der Fall wäre, wenn

$$[6,7] \quad \frac{A_2}{2} > A_1 + A_3,$$

wenn also die Dehnbarkeit in Längsrichtung beträchtlich größer als in den beiden anderen Richtungen ist. Das Eintreten eines derartigen Falles hat, wie die Gl. [6,5] lehrt, zur Vorbedingung, daß μ_{21}^* größer als 1 ist. Das würde besagen, daß eine Dehnung $\Delta l_1/l_1$ in Tangentialrichtung eine relativ größere Verkürzung $-\Delta l_2/l_2$ in Längsrichtung bewirkt. Wie später gezeigt wird, ist ein derartiges Verhalten modellmäßig realisierbar, wobei im speziellen Fall (Abschnitt 21) tatsächlich immer $\Delta V \geq 0$ bleibt. Jedoch ist die An-

nahme HARDUNGS unzutreffend, daß der Druck bei Zunahme des Innenvolumens eines Schlauchs bzw. eines Hohlkörpers immer wachsen müsse. Bekannt ist das in den Lehrbüchern der Physik angeführte Beispiel der Seifenblase, deren Innendruck mit steigendem Volumen abnimmt, wobei ihr Wandvolumen konstant bleibt. Eine Druckabnahme in einem Hohlkörper bei Volumenzuwachs ist also keineswegs physikalisch unmöglich. HARDUNGS Argument ist zwar im physiologischen Bereich, nicht aber allgemein zutreffend.

Man gelangt also, wenn man sich vom realen Modell entfernt, leicht zu Fehlschlüssen, da manche Gleichungen dazu verlocken, willkürlich gewählte Werte einzusetzen. Das typische Beispiel eines solchen Fehlers ist Gl. [6,4].

7. Die FRANKSchen Elastizitätsmoduln

Inhalt: Definition und Bedeutung der von FRANK 1906 und 1920 angegebenen differentiellen Elastizitätsmoduln werden erklärt.

RÖNTGEN bemerkte 1876 als erster die Schwierigkeiten, die bei der Beschreibung endlicher Dehnungen auftreten. An RÖNTGENS Gedanken anknüpfend baute FRANK seine Theorie der endlichen Dehnungen auf. FRANKS Arbeiten wurden teilweise nicht verstanden, zum Teil wurden seine Entdeckungen von anderen Autoren später neu erhoben, wobei seine Urhebererschaft entweder nicht beachtet wurde oder in Vergessenheit geriet. Dies trifft auch auf seine differentiellen Moduln zu, die er, wie schon in Abschnitt 1 erwähnt, 1906 und 1920 aufgestellt hat und die neuerdings unter der Bezeichnung „incremental modulus“ auf LOVE (1927) zurückgeführt werden. Auffälligerweise fehlt auch von zuständiger Seite eine Auseinandersetzung mit FRANKS theoretischen Ergebnissen so gut wie vollständig, während sich ausführliche Untersuchungen mit den YOUNGSchen Moduln beschäftigen (z. B. MÜLLER 1928, HARDUNG 1964).

In Abschnitt 2 und 3 wurde auf die wichtige Tatsache aufmerksam gemacht, daß bei endlichen Dehnungen Kraft und Spannung einander keineswegs proportional bleiben (s. Abb. 2,1). Es zeigt sich nun, daß die Kraft-Spannung-Dualität als Ursache einer gewissen Verwirrung in FRANKS Definitionn in Erscheinung trat. FRANKS rühmenswerte Idee war es, den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl nicht auf die Ausgangsdimensionen des untersuchten Stoffes, sondern auf die im jeweiligen Dehnungszustand vorhandenen Dimensionen zu beziehen. So ist z. B. die Arterienwand, die bei Innendruck Null den „Ruheradius“ r_0 hat, durch den in vivo bestehenden Mitteldruck auf $r = r_0 + \Delta r$ gedehnt, wobei Δr etwa 20% bezogen auf r_0 beträgt. Die durch die Druckschwankungen des Pulses erzeugten Radiusänderungen sind demgegenüber klein.

Überträgt man diese Überlegungen auf ein durch die Kraft K gedehntes Band der Länge l , dann ergibt sich folgendes, zu [2,5] analoges Schema:

	Kraft:	0	K	$K + dK$
[7,1]	Länge:	l_0	$l = l_0 + \Delta l$	$l + dl$
	Querschnitt:	q_0	$q = q_0 - \Delta q$	$q - dq$

Zum Unterschied gegenüber Schema [2,5] enthält Schema [7,1] eine weitere Spalte. Die Gesamtzahl der eingetragenen Meßwerte beträgt demnach 8. Es

sei hier festgelegt, daß unter der vollständigen Bestimmung des differentiellen Elastizitätsmoduls die Festlegung aller 8 in Schema [7.1] enthaltenen Meßwerte zu verstehen ist. Die größere Zahl der notwendigen Messungen ist ein Charakteristikum der Theorie der endlichen Dehnungen gegenüber der Theorie der Kristallelastizität, wo zur vollständigen Bestimmung des Dehnungsverhaltens eines Stoffes nur 5 Messungen nötig sind (Abschnitt 2).

Die von FRANK (1906) angegebene Moduldefinition lautet:

$$[7.2] \quad E = \frac{dK}{q} \cdot \frac{l}{dl}$$

Er konnte experimentell an Gummi nachweisen, daß dieser Modul in einem weiten Dehnungsbereich trotz der starken Krümmung der Kraft-Längenkurve (vgl. Abb. 2.1) konstant ist. Das gleiche gilt auch für die differentiell definierte Querkontraktionszahl

$$[7.3] \quad \mu_{ik} = - (dl_i/l_i)/(dl_k/l_k)$$

die für Gummi ebenfalls bei Dehnung in einer Richtung in einem weiten Bereich konstant ist und sehr nahe dem Wert 0,5 liegt. FRANK (1906) erhielt an Gummi einen mittleren Wert für μ_{12} von 0,46. KENNER u. WALDHÄUSL (1963) konnten FRANKS Ergebnis grundsätzlich bestätigen, beobachteten an Gummi jedoch Werte von μ_{12} zwischen 0,49 und 0,5.

In seiner Arbeit über die Elastizität der Blutgefäße gebrauchte FRANK (1920) einen neuen differentiellen Elastizitätsmodul, der von KENNER u. WETTERER (1963) die Bezeichnung E_1 erhielt, und hier ϵ genannt werden soll (vgl. Fußnote auf S. 74). FRANK hatte offenbar angenommen, daß dieser neue Elastizitätsmodul mit seinem früher (1906) definierten identisch sei. Die Definition dieses Moduls lautet:

$$[7.4] \quad \epsilon = d\sigma \frac{l}{dl}$$

Der Unterschied dieser Definition gegenüber der Definition [7.2], der in der Verschiedenheit von dK/q einerseits und $d\sigma$ andererseits besteht, scheint FRANK erst viel später aufgefallen zu sein. In einem Sonderdruck seiner ersten Arbeit (1906) aus FRANKS Nachlaß fanden KENNER u. WETTERER (1963) einen auf ϵ bezogenen handschriftlichen Vermerk neben der Definition des Moduls E : „Zu beachten, daß nicht $= 2\sigma$ gesetzt, nochmals durchgehen“. Offenbar ist FRANK jedoch nicht mehr zur Durcharbeitung dieser Notiz gekommen.

In der Rückschau ist heute ganz leicht zu erklären, warum FRANK (1906) einen „kraftbezogenen“ und (1920) einen „spannungsbezogenen“ Modul anwandte. Da bei Messungen immer Kräfte und nicht Spannungen registriert werden, bot der Modul E Vorteile bei FRANKS Experimenten an Gummi. Demgegenüber weist dieser Modul für Berechnungen eine Reihe von Nachteilen auf. Da zwischen den Spannungen in der Wand eines „frei“ gedehnten Schlauchs sehr einfache Beziehungen bestehen (Gl. [1,8] bis [1,10]) und da, wie in Abschnitt 2 erklärt, für das Verhalten des Materials nicht die Kräfte, sondern die inneren Spannungen maßgebend sind, führt der Modul ϵ auf viel einfachere Gleichungen als der Modul E . Der spannungsbezogene Modul ϵ war also für FRANKS (1920) ausführliche Berechnungen wesentlich leichter zu handhaben.

KENNER u. WETTERER gaben 1963 eine einfache Begründung dafür, daß die beiden Moduln E und ϵ nicht übereinstimmen können. Es ist

$$[7,5] \quad \sigma = \frac{K}{q}$$

und daher

$$[7,6] \quad d\sigma = \frac{dK}{q} - \sigma \frac{dq}{q}$$

Die beiden Moduln differieren also um $\sigma \cdot dq/q$

Um die Größenordnung des Unterschiedes festzustellen, sei auf das oben erwähnte Beispiel des Gummibandes zurückgegriffen. Sein Volumen beträgt

$$[7,7] \quad V_W = l \cdot q$$

Die relative Volumenänderung bei Dehnung ergibt sich daher zu

$$[7,8] \quad \frac{dV_W}{V_W} = \epsilon + \frac{dq}{q}$$

ϵ bedeutet die Elongation $\frac{dl}{l}$ in Dehnungsrichtung. Durch Einsetzen von Gl. [7,8] in Gl. [7,6] erhält man

$$[7,9] \quad d\sigma = \frac{dK}{q} + \sigma \left(\epsilon - \frac{dV_W}{V_W} \right)$$

Da bei Gummi Volumenkonstanz vorausgesetzt werden kann, ist $dV_W/V_W = 0$ zu setzen. Durch Berücksichtigung der Moduldefinitionen [7,2] und [7,4] folgt schließlich

$$[7,10] \quad \epsilon = E + \sigma$$

Diese Gleichung gilt, wie hier betont werden soll, nur unter der Voraussetzung, daß die Dehnung eindimensional ist, d. h. nur in einer Richtung erfolgt. Analoge Gleichungen für komplizierte mehrdimensionale Dehnungen werden in Abschnitt 10 abgeleitet.

In Abschnitt 2 wurde erwähnt, daß die Spannungen in der Arterienwand von der Größenordnung 10^6 dyn/cm² sind. Die Elastizitätsmoduln haben die Größenordnung 10^7 dyn/cm². Wenn auch Gl. [7,10] wie erwähnt nur streng für eindimensionale Dehnungen Gültigkeit besitzt, darf man doch aus diesen Zahlen als grobe Schätzung für die Verhältnisse in der Arterienwand unter in-vivo-Bedingungen folgern, daß die beiden Moduln in der Praxis um 10% und mehr voneinander abweichen können. Dieser Unterschied mag sich bei Berechnungen und Messungen wohl bemerkbar machen.

8. Kritik der FRANKSchen Elastizitätstheorie

Inhalt: An der FRANKSchen „Lehre von den endlichen Dehnungen“ sind folgende Punkte zu kritisieren: 1. daß FRANK die Dualität seiner Moduln nicht beachtet hat, 2. daß er die Querkontraktionszahl der Arterienwand allein auf Grund der Inkompressibilität zu 0,5 annahm, 3. daß er die Eindeutigkeit des Dehnungspotentials außer Acht ließ und 4. daß seine Definitionen keine Vorschrift zur Messung der Moduln bei Dehnungen in mehreren Richtungen enthalten.

Die folgende Kritik kann dem großen Verdienst FRANKS, das vor allem in der Aufstellung des Konzepts der differentiellen Elastizitätsmoduln zu erblicken ist, keinen Abbruch tun. Aus diesem Grund sollen auch die differentiellen Elastizitätsmoduln für endliche Dehnungen nach FRANK benannt bleiben und dem YOUNGSchen Elastizitätsmodul für sehr kleine Dehnungen gegenübergestellt werden.

Die Kraft- und Spannungsdualität ist nicht so sehr eine Eigentümlichkeit der differentiellen Moduln, sondern, wie schon in Abschnitt 2 gezeigt, ein Charakteristikum sehr starker Dehnungen. Wendet man die beiden FRANKSchen Moduln auf sehr kleine Dehnungen aus der ungedehnten Ausgangslage eines elastischen Stoffes an, so zeigt sich, daß die gemessenen Werte mit jenen des YOUNGSchen Moduls sinngemäß übereinstimmen, wenn man berücksichtigt, daß unter dieser Voraussetzung die Kraft der Vordehnung gleich Null zu setzen ist, der Kraftzuwachs gleich der gesamten dehnenden Kraft ist und schließlich wegen der Kleinheit der Dehnungen $q = q_0$ geschrieben werden kann.

Der YOUNGSche Modul kann demnach als ein Sonderfall der FRANKSchen differentiellen Moduln angesehen werden.

Die von FRANK übersehene Dualität seiner Moduln soll in den Gleichungen durch die folgenden Bezeichnungen und Abkürzungen ausgedrückt werden. Im kraftbezogenen System gilt

$$[8,1] \quad \frac{1}{E_k} \quad \alpha_k$$

Die zugehörige Querkontraktionszahl lautet

$$[8,2] \quad \mu_{ik}$$

Für die reziproken Moduln des spannungsbezogenen Systems wird die Abkürzung

$$[8,3] \quad \frac{1}{E_k} := \alpha_k$$

und die Bezeichnung

$$[8,4] \quad \mu'_{ik}$$

für die Querkontraktionszahl eingeführt (vgl. auch Anhang).

Der Nachweis, daß die durch die Symbolik angedeutete Dualität nicht nur für die Moduln, sondern auch für die Querkontraktionszahlen zutrifft, wird in Abschnitt 9 und 10 erbracht.

Der zweite Fehler FRANKS, der auch noch von KENNER u. WETTERER (1963) übernommen wurde, betrifft die in Abschnitt 4 besprochenen Beziehungen zwischen Moduln und Querkontraktionszahlen volumenkonstanter Materialien.

Die unrichtige Annahme, daß die Querkontraktionszahlen volumenkonstanter Stoffe auch bei richtungsmäßig unterschiedlichem Verhalten der Elastizitätsmoduln einheitlich den konstanten Wert 0,5 hätten, ist auf die Außerachtlassung der genannten Beziehungen zurückzuführen. Die Gleichungssysteme der FRANKSchen Moduln stimmen formal mit der Gl. [4,1] der YOUNGSchen Moduln überein. Nur sind die Größen $\Delta l/l$, σ , A , μ^* durch dl/l , dK/q , a , μ bzw. dl/l , $d\sigma$, α , μ' zu ersetzen. Die entsprechenden Koeffizientenmatrizen der FRANKSchen Moduln seien M_a bzw. M_α genannt. Die formale Übereinstimmung bringt

mit sich, daß auch alle in Abschnitt 4 abgeleiteten Beziehungen zwischen den Moduln und Querkontraktionszahlen der Koeffizientenmatrizen für jedes der beiden FRANKSchen Modulsysteme Gültigkeit behält. Dies ist leicht zu bestätigen, da bei Volumenkonstanz die Summe der differentiellen Elongationen Null ergeben muß.

$$[8,5] \quad \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$$

Ferner dürfen bei gleichen differentiellen Kraft- oder Spannungsanstiegen in allen Richtungen keine Dimensionsänderungen gegenüber den bereits bestehenden Vordehnungen auftreten. Daraus folgt, daß bei

$$[8,6] \quad \frac{dK_1}{q_1} = \frac{dK_2}{q_2} = \frac{dK_3}{q_3} \quad \text{oder} \quad d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma_3$$

alle differentiellen Elongationen Null sein müssen:

$$[8,7] \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$$

Dadurch ergeben sich zwischen den Matrixelementen der FRANKSchen Modulsysteme analoge Beziehungen, wie sie in Abschnitt 4 für das YOUNGSche Modulsystem abgeleitet wurden.

Auf diese Analogie wurde bereits in Abschnitt 6 Bezug genommen, als FRANKS Vorgangsweise kritisiert wurde, daß er zwar alle Querkontraktionszahlen gleich 0,5 setzt, jedoch verschiedene Dehnbarkeiten in verschiedenen Richtungen der Arterienwand annahm. Diese Annahme ist also nicht nur für sehr kleine, sondern für beliebige Dehnungen unrichtig.

Auf Grund dieser Überlegungen wäre anzunehmen, daß das Gleichungssystem

$$[8,8] \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= a \frac{dK_1}{q_1} - 0,5 a \frac{dK_2}{q_2} - 0,5 a \frac{dK_3}{q_3} \\ \epsilon_2 &= -0,5 a \frac{dK_1}{q_1} + a \frac{dK_2}{q_2} - 0,5 a \frac{dK_3}{q_3} \\ \epsilon_3 &= -0,5 a \frac{dK_1}{q_1} - 0,5 a \frac{dK_2}{q_2} + a \frac{dK_3}{q_3} \end{aligned}$$

das Verhalten eines isotropen volumenkonstanten elastischen Körpers richtig wieder gibt. Wie leicht nachzuprüfen ist, ist sowohl die Summe der Spalten als auch der Zeilenelemente der zugehörigen Koeffizientenmatrix Null, womit die oben erwähnten Bedingungen erfüllt sind. Man kann nun rechnerisch folgendes Gedankenexperiment durchführen:

Zunächst werde die Kraft in Richtung 1 von 0 auf K_1 erhöht. Dann werde K_1 konstantgehalten und die Kraft in Richtung 2 von 0 auf K_2 erhöht. In Richtung 3 soll der Einfachheit halber keine Kraft wirken. Man erhält aus der Berechnung nach Gl. [8.8] die nach den beiden Dehnungen bestehenden Längendimensionen des elastischen Körpers. Es ist klar, daß es für das Resultat gleichgültig sein muß, ob zuerst die Kraft K_1 und dann die Kraft K_2 einwirkt, oder umgekehrt. Tatsächlich findet man jedoch nach einer elementaren, wenn auch etwas umständlichen Rechnung, daß dies nicht der Fall ist. Die Gleichungen [8.8] führen also zu einem physikalisch unsinnigen Resultat, da es keinen statischen Vorgang geben kann, in dem die Reihenfolge der Kräfteeinwirkungen auf den erreichten Zustand einen Einfluß hat.

Die Erklärung dieses Paradoxons sei kurz vorweggenommen. In Abschnitt 5 wurde das Dehnungspotential erläutert, wonach die Arbeit unabhängig von der Aufeinanderfolge der Arbeitswege sein muß. Wenn ein Dehnungspotential existiert, was man für jeden realen elastischen Körper voraussetzen hat, dann ist auch die Forderung erfüllt, daß gleiche Gesamtkräfte unabhängig von der Reihenfolge des Angreifens gleiche Wirkungen haben. Für sehr kleine Dehnungen ($l/l_0 \ll 1$) beweisen die in Abschnitt 4 besprochenen Bedingungen, daß ein derartiges Potential für den durch die Gleichungen beschriebenen Körper

existiert. Für endliche Dehnungen sind diese Bedingungen zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Potentials. Das paradoxe Resultat der oben erwähnten Berechnung zeigt, daß für die Gleichungen [8,8] kein Potential existiert, was mit anderen Worten besagt, daß diese Gleichungen physikalisch sinnlos sind. Es ergibt sich aus dem Zusammenhang, daß FRANK auch auf diese Beziehungen nicht geachtet hat.

Eine Unklarheit enthält schließlich die Definition der FRANKschen Moduln, wie KENNER (1964a) nachweisen konnte. Dies sei hier an dem Modul ϵ dargestellt. Es sei angenommen, daß in den 3 Richtungen die 3 Spannungen σ_k gewisse Werte haben. Es soll nun in Richtung 1 der Modul ϵ_1 gemessen werden. Experimentell wird hierzu die Spannung σ_1 um den sehr kleinen Betrag $d\sigma_1$ erhöht und der relative Längenzuwachs dl_1/l_1 beobachtet. Was geschieht jedoch mit den Spannungen σ_2 und σ_3 ? Offenbar sollen diese Spannungen während der Messung konstant gehalten werden. Die von FRANK angegebenen Definitionsgleichungen enthalten dafür jedoch keinerlei Hinweis. Sollen die beiden senkrechten Spannungen σ_2 und σ_3 konstant bleiben, dann müßte anstelle der Definition Gl. [7,4] die Definition

$$[8,9] \quad \epsilon_k = \frac{1}{\frac{\partial l_k}{\partial \sigma_k}} \cdot l_k$$

treten.

Es wird sich im folgenden zeigen, daß diese Annahme richtig ist und daß eine analoge Ergänzung der Definition für den Modul E und die Querkontraktionszahlen notwendig ist.

Es wird sich auch zeigen, daß alle erwähnten Fehler und Unklarheiten daher rühren, daß FRANK nicht auf den notwendigen Zusammenhang der Definitionen mit dem in Abschnitt 5 erklärten Dehnungspotential geachtet hat. Die Untersuchung über die exakte Fassung der FRANKschen Moduln wird daher von der Untersuchung des Dehnungspotentials ausgehen.

9. Die Ableitung der FRANKschen Moduln aus dem Dehnungspotential

Inhalt: Wenn das Dehnungspotential eines Stoffes bekannt ist, dann können Kräfte und Dehnungen und damit auch die Moduln berechnet werden. Unter Voraussetzung von Volumenkonstanz ergeben sich auf diesem Wege auch die in Abschnitt 4 besprochenen Beziehungen zwischen Moduln und Querkontraktionszahlen. Es werden Bedingungen für die Existenz eines Dehnungspotentials aufgestellt und die exakte Schreibweise der FRANKschen Moduldefinition angegeben.

Wie in Abschnitt 5 besprochen wurde, ist das Dehnungspotential U , die elastisch gespeicherte Energie, eindeutig von den Dimensionen des gedehnten elastischen Stoffes abhängig.

$$[9,1] \quad U = U(l_1, l_2, l_3)$$

Wäre diese Abhängigkeit nicht eindeutig, so hinge die Dehnungsarbeit von der Reihenfolge der Dehnungen, d. h. davon ab, ob das elastische Material zuerst in Richtung 1 und hiernach in Richtung 2 oder umgekehrt auf denselben Endzustand gedehnt wird.

Die in den 3 Richtungen des Raumes wirkenden Kräfte hängen mit dem Dehnungspotential durch die Beziehung

$$[9.2] \quad K_k = \frac{\partial U}{\partial l_k}$$

zusammen. Diese Gleichung bedeutet nichts anderes, als die in differentieller Form angeschriebene bekannte Beziehung, wonach die Arbeit (das Potential) als Produkt von Kraft mal Weg definiert ist (d. h. $dU = K \cdot dl$).

Es soll im folgenden vorausgesetzt werden, daß das untersuchte Material inkompressibel und volumenkonstant ist und daß ferner in Richtung 3 keine Kraft wirke.

$$[9.3] \quad K_3 = 0$$

Diese Vereinfachungen sind zulässig, da die abgeleiteten Gleichungen auf inkompressible, volumenkonstante und dünnwandige Schläuche und Arterien angewendet werden sollen.

Mit der Bedingung für Volumenkonstanz ($V_W = \text{const}$) erhält man

$$[9.4] \quad l_1 l_2 l_3 = l_{10} l_{20} l_{30}$$

und daraus als Beziehung zwischen den relativen Längen

$$[9.5] \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

(Hier bedeutet λ jeweils die auf die Ausgangslänge bezogene relative Länge

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = 1 + \epsilon^*$$

Vergl. diesbezüglich die Zusammenstellung der Definitionen im Anhang). Das Potential U kann daher, wie in Abschnitt 5 dargelegt, als Funktion der Längen l_1 und l_2 ausgedrückt werden. Da das Volumen des gedehnten Körpers als konstant angenommen wird, ist es vorteilhaft, alle Beziehungen auf die Volumeneinheit bzw. die Längeneinheit anzuwenden. Das Dehnungspotential pro Volumeneinheit sei mit W bezeichnet. Somit kann man das Potential U als Funktion der relativen Längen anschreiben.

$$[9.6] \quad U = V_W \cdot W(\lambda_1, \lambda_2)$$

Durch Einsetzen in Gl. [9.2] erhält man für die Kräfte

$$[9.7] \quad K_k = V_W \frac{\partial W}{\partial l_k} = q_{k0} \frac{\partial W}{\partial \lambda_k}$$

und kann daraus die Spannungen berechnen:

$$[9.8] \quad \sigma_k = \frac{K_k}{q_k} = \frac{K_k \lambda_k}{q_{k0}} = \lambda_k \frac{\partial W}{\partial \lambda_k}$$

Die Beziehungen zwischen dem Querschnitt q und dem Ausgangsquerschnitt q_0 erhält man für ein volumenkonstantes Material aus

$$l q = l_0 q_0$$

Daraus folgt die Gleichung

$$q = q_0 \frac{l_0}{l} = \frac{q_0}{\lambda}$$

die bei der Berechnung von [9.7] und [9.8] angewendet wurde. Aus diesen

beiden Gleichungen werden nun die differentiellen Kraft- bzw. Spannungszuwächse berechnet. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß W und daher auch K und σ Funktionen zweier Variabler (λ_1, λ_2) sind. Die Errechnung der Differentiale dK und $d\sigma$ aus Gl. [9,7] und [9,8] hat daher nach der Regel

$$[9,9] \quad dK = \frac{\partial K}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial K}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$$

zu erfolgen. Eine weitere, für die folgenden Berechnungen wichtige Umformung wird durch die Beziehung

$$\varepsilon = \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ermöglicht. Die Anwendung der Regel [9,9] auf Gl. [9,7] und [9,8] führt schließlich auf die beiden folgenden Gleichungssysteme.

$$[9,10] \quad \begin{aligned} \frac{dK_1}{q_1} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} \varepsilon_1 + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \varepsilon_2 \\ \frac{dK_2}{q_2} &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \varepsilon_1 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2} \varepsilon_2 \end{aligned}$$

$$[9,11] \quad \begin{aligned} d\sigma_1 &= \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} \right) \varepsilon_1 + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \varepsilon_2 \\ d\sigma_2 &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \varepsilon_1 + \left(\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2^2} \right) \varepsilon_2 \end{aligned}$$

Offensichtlich gehören die beiden Gl. [9,10] dem „kraftbezogenen“, die beiden Gl. [9,11] dem „spannungsbezogenen“ System an. Es sei ergänzend bemerkt, daß sich die vereinfachende Annahme 9,3 in den beiden Gleichungssystemen [9,10] und [9,11] dahingehend auswirkt, daß diese jeweils nur zwei Gleichungen enthalten. Im „allgemeinen Fall“ ergäben sich je drei Gleichungen. Das gleiche gilt verständlicherweise auch für die folgenden Umwandlungen der beiden Gleichungssysteme. Diese bestehen zunächst darin, daß man [9,10] und [9,11] nach den Elongationen aufgelöst. Man erhält auf diese Weise Gleichungssysteme, die formal mit [4,1] übereinstimmen. Aus den eben genannten Gründen fehlt die 3. Gleichung und auf der rechten Seite die 3. Spalte. Die 3. Gleichung fehlt, da sie infolge der geforderten Volumenkonstanz überflüssig ist und die Elongation ε_3 unmittelbar aus der Beziehung

$$[9,12] \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

berechnet werden kann. Die 3. Spalte fehlt, da $K_3 = 0$ und demnach auch Kraft- und Spannungszuwachse Null sein müssen.

Die Gleichungen lauten

$$[9,13] \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_1 \frac{dK_1}{q_1} - \mu_{12} \alpha_2 \frac{dK_2}{q_2} \\ \varepsilon_2 &= -\mu_{21} \alpha_1 \frac{dK_1}{q_1} + \alpha_2 \frac{dK_2}{q_2} \end{aligned}$$

$$[9,14] \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_1 d\sigma_1 - \mu'_{12} \alpha_2 d\sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= -\mu'_{21} \alpha_1 d\sigma_1 + \alpha_2 d\sigma_2 \end{aligned}$$

Sie stellen also die Modulform der beiden FRANKSchen Systeme dar, die die Wirkungen von Kraft- bzw. Spannungszuwachsen in verschiedenen Richtungen auf die Dimension des untersuchten Stoffes beschreiben. Für die Moduln und Querkontraktionszahlen ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
 [9,15] \quad a_1 &= \frac{X_2}{D_x} & a_2 &= \frac{X_1}{D_x} \\
 \mu_{12} &= \frac{Y}{X_1} & \mu_{21} &= \frac{Y}{X_2} \\
 D_x &= X_1 X_2 - Y^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [9,16] \quad \alpha_1 &= \frac{Z_2}{D_z} & \alpha_2 &= \frac{Z_1}{D_z} \\
 \mu'_{12} &= \frac{Y}{Z_1} & \mu'_{21} &= \frac{Y}{Z_2} \\
 D_z &= Z_1 Z_2 - Y^2
 \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung folgende Symbole eingeführt wurden:

$$\begin{aligned}
 [9,17] \quad X_k &= \lambda_k^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_k^2} \\
 Y &= \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \\
 Z_k &= X_k + \sigma_k
 \end{aligned}$$

Diese Berechnung läßt die Moduln und Querkontraktionszahlen der beiden FRANKSchen Systeme als Funktion eines gegebenen Dehnungspotentials ausdrücken. Bereits 1920 hatte FRANK das Gleichungssystem der spannungsbezogenen Moduln aufgestellt, ohne jedoch auf die Beziehung zu einem Dehnungspotential zu achten. Auf die Widersprüche, die bei solchem Vorgehen auftreten können, wurde bereits ausführlich in Abschnitt 8 hingewiesen.

Aus den Gl. [9,15] und [9,16] kann man leicht die Gl.

$$[9,18] \quad \mu_{12} a_2 = \mu_{21} a_1$$

und

$$[9,19] \quad \mu'_{12} \alpha_2 = \mu'_{21} \alpha_1$$

erhalten, die formal mit Gl. [4,7] übereinstimmen. Wie schon in Abschnitt 8 erklärt, gelten alle in Abschnitt 4 abgeleiteten Beziehungen formal auch für die beiden FRANKSchen Modulsysteme.

Wenn man, wie in Abschnitt 8 an einem Beispiel gezeigt wurde, mit willkürlich gewählten Modulwerten ein Gleichungssystem der Form [9,15] oder [9,16] aufstellt, ist man vor die Notwendigkeit gestellt, dessen physikalische Brauchbarkeit zu prüfen. Diese Gleichungen können nach dK_k bzw. nach $d\sigma_k$ aufgelöst werden. Wie sich unmittelbar aus der Ableitung der Gl. [9,10] und [9,11] aus [9,7] und [9,8] ergibt, muß dann jeweils dK_k bzw. $d\sigma_k$ ein vollständiges Differential von K_k bzw. σ_k sein. Die Gleichungen sollen hier nur für dK_k angeschrieben werden. Wenn die Auflösung beispielsweise

$$[9,20] \quad dK_k = P d\lambda_1 + Q d\lambda_2$$

ergeben hat, dann muß, damit die Kraft K_k eindeutig berechnet werden kann, zwischen den erhaltenen Koeffizienten P und Q die Beziehung

$$[9,21] \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial Q}{\partial \lambda_1} = 0$$

bestehen. Nur wenn diese Beziehung richtig ist, ist dK_k ein vollständiges Differential von K_k .

Für das in Abschnitt 8 dargestellte Beispiel war angenommen, daß $\mu_{12} = \mu_{21} = 0,5$ und daß $a_1 = a_2 = a$ sei. Die Auflösung der Gl. [8,8] unter der vereinfachenden Annahme $K_3 = 0$ ergibt

$$[9,22] \quad \begin{aligned} dK_1 &= \frac{4q_{10}}{3a} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} d\lambda_2 \right) \\ dK_2 &= \frac{4q_{20}}{3a} \left(\frac{1}{2\lambda_1\lambda_2} d\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2^2} d\lambda_2 \right) \end{aligned}$$

In der ersten Gleichung also, wenn man von dem konstanten Faktor vor der Klammer absieht, die Koeffizienten von $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$

$$[9,23] \quad P = \frac{1}{\lambda_1^2} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2}$$

in der zweiten Gleichung umgekehrt. Man erkennt unmittelbar, daß Gl. [9,21] weder für dK_1 noch für dK_2 erfüllt werden kann. Das bedeutet physikalisch, daß die Kräfte in dem gegebenen Beispiel je nach dem Dehnungsweg verschieden sein müssen. Dies wurde tatsächlich in dem gewählten Beispiel gefunden. Es ist natürlich sinnlos, unter diesen Umständen nach einem Dehnungspotential zu fragen; es kann ebenfalls nicht existieren.

Das analoge Beispiel für das spannungsbezogene Modulsystem führt mit den willkürlichen Annahmen $\mu'_{12} = \mu'_{21} = 0,5$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ auf

$$[9,24] \quad \begin{aligned} d\sigma_1 &= \frac{4}{3\alpha} \left(\frac{1}{\lambda_1} d\lambda_1 + \frac{1}{2\lambda_2} d\lambda_2 \right) \\ d\sigma_2 &= \frac{4}{3\alpha} \left(\frac{1}{2\lambda_1} d\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} d\lambda_2 \right) \end{aligned}$$

Hier ist Gl. [9,21] identisch erfüllt. Man findet auch unschwer das Integral

$$[9,25] \quad \sigma_1 = \frac{2}{3\alpha} \left(2 \ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 \right)$$

und eine analoge Gleichung für σ_2 . Unter Berücksichtigung von Gl. [9,7] und [9,8] kann man schließlich das Dehnungspotential berechnen.

$$[9,26] \quad W = \frac{2}{3\alpha} \left((\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2 + (\ln \lambda_1 \ln \lambda_2) \right)$$

Bei der Berechnung von W muß man darauf achten, daß in Gl. [9,7] und [9,8] rechts partielle Differentialquotienten stehen. Das Potential W muß also dem Integral von σ_1 nach Gl. [9,25] und dem entsprechenden Ausdruck für σ_2 , der aus [9,25] durch Vertauschen der Indices entsteht, genügen. Man kann durch Bildung der partiellen Differentialquotienten von Gl. [9,26] und Berücksichtigung von Gl. [9,8] zeigen, daß dies der Fall ist.

Die Annahme konstanter Modulwerte in allen Richtungen führt demnach beim spannungsbezogenen (im Gegensatz zum kraftbezogenen) FRANKSchen Modulsystem zu einem physikalisch realen Körper. Der durch die Errechnung des Potentials [9,26] erbrachte Nachweis dieser Behauptung läßt sich darin zusammenfassen, daß dW ein vollständiges Differential von W sein muß. Analog zu Gl. [9,20] und [9,21] muß also

$$[9,27] \quad dW = K_1 d\lambda_1 + K_2 d\lambda_2$$

und demnach auch

$$[9,28] \quad \frac{\partial K_1}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial K_2}{\partial \lambda_1} = 0$$

erfüllt sein.

Mit der in den Gl. [9,13] bis [9,17] festgelegten Definition der FRANKSchen Moduln kann man Berechnungen aus gegebenen Dehnungspotentialen ausführen. Für experimentelle Messungen sind, wie in Abschnitt 8 erklärt wurde, Definitionen dieser Moduln erforderlich, die Vorschriften über die Bedingungen ihrer Messung enthalten.

Wie KENNER (1964a) gezeigt hat, kann man zu diesem Zweck von den allgemeinen Gleichungen

$$[9,29] \quad l_k = l_k(K_1, K_2)$$

und

$$[9,30] \quad l_k = l_k(\sigma_1, \sigma_2)$$

ausgehen. Durch Bildung der Differentiale und nachfolgende Division durch l_k erhält man je 3 Gleichungen für die 3 differentiellen Elongationen ε_k . Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. [9,13] bzw. [9,14] folgen schließlich die Definitionsgleichungen

$$[9,31] \quad \alpha_k = \frac{\partial l_k}{\partial K_k} \cdot \frac{q_k}{l_k}; \quad \mu_{ik} = -\frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\partial l_i}{\partial K_k} \cdot \frac{q_k}{l_i}$$

und

$$[9,32] \quad \alpha_k = \frac{\partial l_k}{\partial \sigma_k} \cdot \frac{1}{l_k}; \quad \mu'_{ik} = -\frac{1}{\alpha_k} \cdot \frac{\partial l_i}{\partial \sigma_k} \cdot \frac{1}{l_i}$$

Nach diesen Definitionen lautet die allgemeine Meßvorschrift, daß zur Messung eines spannungsbezogenen Moduls die senkrecht zur jeweiligen Dehnungs- bzw. Meßrichtung wirkenden Spannungen und zur Messung eines kraftbezogenen Moduls die senkrecht zur jeweiligen Dehnungs- bzw. Meßrichtung wirkenden Kräfte konstant gehalten werden müssen. Eine ausführliche Erläuterung erfolgt in Abschnitt 20.

Die neuen und exakten Definitionen der FRANKSchen differentiellen Elastizitätsmoduln Gl. [9,31] und [9,32] sind im Gegensatz zu den 1906 und 1920 von FRANK angegebenen Definitionen auf beliebige mehrdimensionale Dehnungen anwendbar. Bei eindimensionalen Dehnungen stimmen die neuen Moduldefinitionen sinngemäß mit den in Gl. [7,2] bis [7,4] beschriebenen überein.

10. Die Transformation der FRANKSchen Modulsysteme

Inhalt: Das kraft- und das spannungsbezogene FRANKSche Modulsystem sind gleichwertig, da jedes der beiden allein das elastische Verhalten eines Stoffes beschreiben kann.

Wenn eines der beiden Modulsysteme vollständig bestimmt ist, kann das andere durch Transformationsgleichungen berechnet werden.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß zwei Systeme von differentiell definierten Elastizitätsmoduln existieren, die beide aus einem gemeinsamen Dehnungspotential abgeleitet werden können. Mit jedem dieser beiden Modulsysteme kann man das Verhalten und die Eigenschaften des untersuchten Materials eindeutig beschreiben. Es muß demnach gefordert werden, daß die beiden Systeme durch eine Transformation zusammenhängen (KENNER 1964a).

Im folgenden wird diese Transformation mittels Matrizenrechnung durchgeführt. Das Ergebnis, d. h. Gl. [10,20] bis [10,23] kann mit elementaren Methoden erhalten werden.

Zwischen Kraft- und Spannungszuwachs besteht nach Gl. [7,6] bis [7,9] die Beziehung

$$[10,1] \quad \frac{dK}{q_k} = d\sigma_k + \sigma_k \left(\frac{dV_W}{V_W} - \epsilon_k \right)$$

Bei der folgenden Berechnung soll an der Annahme festgehalten werden, daß das untersuchte Material inkompressibel und demnach volumenkonstant ist, so daß

$$[10,2] \quad \frac{dV_W}{V_W} = 0$$

gilt. Zur Abkürzung der Schreibweise wird, sofern i, k ,

$$[10,3] \quad \mu_{ik} \cdot a_k = a_{ik}$$

geschrieben. Das gleiche gelte auch für die α_k .

Die Gl. [9,13] und [9,14] lauten in Matrizenform

$$[10,4] \quad (\epsilon_k) = (a_{ik}) \left(\frac{dK_k}{q_k} \right)$$

bzw.

$$[10,5] \quad (\epsilon_k) = (\alpha_{ik}) (d\sigma_k)$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß sie nicht nur für die vereinfachten zweigliedrigen Gleichungssysteme, sondern auch für die vollständigen dreigliedrigen Gültigkeit besitzen. Durch Einsetzen von Gl. [10,4] in Gl. [10,4] unter Berücksichtigung der geforderten Volumenkonstanz Gl. [10,2] ergibt sich

$$[10,6] \quad (\epsilon_k) = (a_{ik}) (d\sigma_k - \sigma_k \epsilon_k)$$

und nach Umformung

$$[10,7] \quad (\delta_{ik} + (a_{ik} \cdot \sigma_k)) (\epsilon_k) = (a_{ik}) (d\sigma_k)$$

δ_{ik} ist die diagonale Einheitsmatrix.

Wenn man die linksstehende quadratische Matrix in Gl. [10,7] als (A_{ik}) bezeichnet, ergibt sich durch Einsetzen von Gl. [10,5]

$$[10,8] \quad (A_{ik}) (\alpha_{ik}) = (a_{ik})$$

Analog erhält man für das spannungsbezogene System aus Gl. [10,5]

$$[10,9] \quad (\delta_{ik} - (\alpha_{ik} \cdot \sigma_k)) (\epsilon_k) = (\alpha_{ik}) \left(\frac{dK_k}{q_k} \right)$$

und durch Einsetzen von Gl. [10,1], wenn man die linksstehende quadratische Matrix in Gl. [10,9] als (B_{ik}) bezeichnet

$$[10,10] \quad (B_{ik}) (a_{ik}) = (\alpha_{ik})$$

Aus [10,8] und [10,10] ergeben sich dann die gleichbedeutenden Beziehungen

$$[10,11] \quad (A_{ik})(B_{ik}) = \delta_{ik}$$

$$[10,12] \quad (A_{ik})^{-1} = (B_{ik}) \quad \text{und}$$

$$[10,13] \quad (A_{ik}) = (B_{ik})^{-1}$$

Die beiden Matrizen (A_{ik}) und (B_{ik}) sind also zueinander reziprok. Unter den vereinfachenden Bedingungen, die zur Messung und Berechnung von Schlauchdehnungen gemacht werden können, genügt es, die zweizeiligen Matrizen

$$[10,14] \quad a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und

$$[10,15] \quad \alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{21} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

ausführlicher zu untersuchen. Die vollständig ausgeschriebenen Matrizen (A_{ik}) und (B_{ik}) lauten

$$[10,16] \quad (A_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} \sigma_1 & -a_{21} \sigma_2 \\ -a_{12} \sigma_1 & 1 + a_{22} \sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$[10,17] \quad (B_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{11} \sigma_1 & \alpha_{12} \sigma_2 \\ \alpha_{21} \sigma_1 & 1 - \alpha_{22} \sigma_2 \end{pmatrix}$$

und die dazu reziproken Matrizen

$$[10,18] \quad (A_{ik})^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 + a_{22} \sigma_2 & a_{12} \sigma_2 \\ a_{21} \sigma_1 & 1 + a_{11} \sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1 + a_{11} \sigma_1)(1 + a_{22} \sigma_2) - a_{12} a_{21} \sigma_1 \sigma_2$$

$$[10,19] \quad (B_{ik})^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{22} \sigma_2 & -\alpha_{12} \sigma_1 \\ -\alpha_{21} \sigma_1 & 1 - \alpha_{11} \sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = (1 - \alpha_{11} \sigma_1)(1 - \alpha_{22} \sigma_2) - \alpha_{12} \alpha_{21} \sigma_1 \sigma_2$$

An Hand dieser Beziehungen können nun aus den Gl. [10,12] und [10,13] die Transformationsgleichungen berechnet werden. Grundlage der Berechnung ist, daß zwei Matrizen dann übereinstimmen, wenn alle ihre Elemente übereinstimmen. Aus einer Gleichung mit zweizeiligen quadratischen Matrizen, wie z. B. Gl. [10,12] erhält man demnach 4 elementare Gleichungen zwischen den jeweils zueinandergehörigen Elementen der beiden Matrizen. Die gesamte Transformation des spannungs- und kraftbezogenen Modulsystems wird daher durch 8 Gleichungen beschrieben. Wegen der symmetrischen Eigenschaften der Elemente genügt es jedoch, jeweils nur zwei Gleichungen anzuschreiben:

$$[10,20] \quad E_k = \frac{1}{a_k} = \frac{1 - \alpha_i \sigma_i}{a_k (1 - \alpha_i \sigma_i (1 - \mu'_{ik} \mu'_{ki}))} = \sigma_k$$

$$[10,21] \quad \mu_{ik} = \mu'_{ik} \frac{1}{1 - \alpha_i \sigma_i (1 - \mu'_{ik} \mu'_{ki})}$$

Die Indices i, k können hierbei entweder [1,2] oder [2,1] bedeuten. Die Transformation in umgekehrter Richtung wird durch die Gleichungen

$$[10,22] \quad \epsilon_k = \frac{1}{\alpha_k} = \frac{1 + a_i \sigma_i}{a_k (1 + a_i \sigma_i (1 - \mu_{ik} \mu_{ki}))} + \sigma_k$$

$$[10,23] \quad \mu'_{ik} = \mu_{ik} \frac{1}{1 + a_i \sigma_i (1 - \mu_{ik} \mu_{ki})}$$

beschrieben. Auch hier gilt die erwähnte Symmetrie der Indices.

Die Gl. [10,20] bis [10,23] sind das Ergebnis der in diesem Abschnitt beschriebenen Berechnungen. Interessant ist vor allem das Auftreten der absoluten Spannungen in den Transformationsgleichungen, worauf schon KENNER u. WETTERER (1963) bei der Besprechung der eindimensionalen Dehnung hingewiesen haben.

Die Ableitung der Transformationsgleichungen hat kaum eine große praktische, wohl aber eine theoretische Bedeutung. Erstens wird dadurch die Gleichwertigkeit der beiden Systeme nachgewiesen. Zweitens bekräftigt das Auftreten der absoluten Kräfte bzw. Spannungen in den Gleichungen die Bedeutung der in Abschnitt 7 an Hand des Schema [7,1] begründeten „vollständigen“ Bestimmung der Moduln. In diesem Sinn sind z. B. die spannungsbezogenen Moduln nur dann vollständig bestimmt, wenn durch Heranziehen der Transformationsgleichungen die entsprechenden Moduln des kraftbezogenen Systems berechnet werden können. Offensichtlich genügt hierzu die Kenntnis der Moduln im engeren Sinn nicht. Drittens bringen die Gl. [10,21] und [10,23] den unmittelbaren Beweis, daß nicht nur die Elastizitätsmoduln, sondern auch die Querkontraktionszahlen der beiden Modulsysteme verschieden sind.

11. Kritik der Youngschen Moduln

Inhalt: Es wird nachgewiesen, daß es bei mehrdimensionalen Dehnungen an stark dehnbaren Stoffen unmöglich ist, die YOUNGSchen Moduln zu bestimmen.

Jede Bestimmung von Elastizitätsmoduln bei zweidimensionalen Dehnungen, wie sie bei der Untersuchung dünnwandiger Schläuche und Arterien vorliegen, hängt grundsätzlich mit der Auffindung eines Gleichungssystems der Gestalt

$$[11,1] \quad \begin{aligned} x_1 &= A_{11} y_1 - A_{12} y_2 \\ x_2 &= -A_{21} y_1 + A_{22} y_2 \end{aligned}$$

zusammen. Unter x_k seien hier allgemein die Elongationen, unter A_{ik} die reziprok angeschriebenen Moduln unter Einbeziehung der Querkontraktionszahlen (analog zu Gl. [10,3] verstanden). Die y_k bedeuten Kräfte oder Spannungen bzw. deren differentielle Zuwächse. Für die aufgezählten Größen sind je nachdem, welches Modulsystem untersucht werden soll, die entsprechenden Symbole zu ersetzen.

Unter der Voraussetzung, daß die Elongationen sehr klein sind, was einerseits bei der Anwendung der YOUNGSchen Moduln auf kristallinische Festkörper und andererseits bei beiden FRANKSchen Modulsystemen der Fall ist, kann Gl. [11,1] in je zwei Gleichungen gespalten werden:

$$[11,2] \quad \begin{aligned} x_1 &= A_{11} y_1 \\ x_2 &= -A_{21} y_1 \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung $y_2 = 0$ und

$$[11,3] \quad \begin{aligned} x_1 &= -A_{12} y_2 \\ x_2 &= A_{22} y_2 \end{aligned}$$

unter der Bedingung $y_1 = 0$.

Diese Trennung ist eine mathematische Darstellung des experimentellen Vorgehens zur Messung der Moduln. In Gl. [11,2] werden die Kräfte oder Spannungen bzw. deren differentielle Zuwächse in Richtung 2 Null gesetzt, um eine Messung der Moduln in Richtung 1 zu ermöglichen. Gl. [11,3] beschreibt den gleichen Vorgang zur Messung der Moduln in Richtung 2. Die Gesamtelongationen x_1 und x_2 nach Gl. [11,1] ergeben sich also als Summen der entsprechenden Teilelongationen nach Gl. [11,2] und [11,3]. Sehr kleine Dehnungen in Richtung 1 beeinflussen demnach die Moduln in Richtung 2 nicht. Das Gleiche gilt auch nach Vertauschen der Richtungen. Auf Grund dieser Tatsache können die beiden Gl. [11,2] und [11,3] additiv zu Gl. [11,1] zusammengefügt werden.

Will man die Youngschen Moduln zur Beschreibung mehrdimensionaler endlicher Dehnungen anwenden, dann steht man vor folgendem Problem: die Elongationen x_1 und x_2 sind nicht mehr als sehr klein zu bezeichnen. Man kann daher nicht annehmen, daß beispielsweise die Moduln A_{12} und A_{22} unverändert bleiben, während man die Messung von A_{11} und A_{21} nach Gl. [11,2] durchführt. Umgekehrt verändern sich A_{11} und A_{21} , während man zur Messung von A_{12} und A_{22} eine Dehnung in Richtung 2 ausführt und die Elongationen x_1 und x_2 beobachtet. Man kann sich diese Verhältnisse mit Hilfe eines breiten Gummibandes leicht vor Augen führen. Wenn man dieses Band um einen ganz geringen Betrag in Längsrichtung dehnt, dann ist anzunehmen, daß hierdurch die Dehnbarkeit in der Breitenrichtung nicht beeinflußt wird, während eine starke Dehnung in Längsrichtung zu einer merklichen Verschmälerung des Bandes führt, wodurch die Dehnbarkeit in dieser Richtung und damit auch der entsprechende Modul deutlich beeinflußt werden kann.

Die Trennung der Gl. [11,1] in die beiden Teilgleichungen [11,2] und [11,3] ist daher zur Messung der Youngschen Moduln bei endlichen Dehnungen unzulässig. Andererseits ist es unmöglich, 4 unbekannte Größen (A_{11} , A_{12} , A_{21} und A_{22}) aus nur 2 Gleichungen zu bestimmen.

Durch diese Überlegungen ist bewiesen, daß die Youngschen Moduln bei mehrdimensionalen Dehnungen an sehr dehnbaren Stoffen überhaupt nicht eindeutig angegeben werden können.

Man kann dagegen einwenden, daß die Grenze zwischen „sehr kleinen“ und nicht mehr sehr kleinen endlichen Dehnungen nicht scharf anzugeben ist und daß au. diesem Grund Elongationen von etwa 20% bezogen auf die Ausgangslänge immerhin noch genügend klein seien, um die Youngschen Moduln mit hinreichender Genauigkeit bestimmen zu können. Dieser Gedanke mag wohl MÜLLER (1928) und HARDUNG (1964a und b) und eine Reihe anderer Autoren dazu bewegt haben, ausschließlich die Youngschen Moduln zur Beschreibung der Arterienelastizität heranzuziehen.

Demgegenüber ist jedoch zu bedenken, daß die exakte Anwendung des Youngschen Moduls nur in einem Dehnungsbereich von 1% möglich ist (vgl. Abschnitt 2). Da die gleichen Kräfte, die an Metallen relative Dehnungen von 1% hervorrufen, an Arterien relative Dehnungen von 50% bewirken, sind bei Berechnung der Youngschen Moduln der Arterienwand beträchtliche Fehler zu erwarten, deren Beträge mit zunehmender Dehnung anwachsen. Die Forderung, zur Beschreibung der Arterienelastizität anstelle des ungenauen Youngschen Moduls die exakt definierten differentiellen Moduln zu verwenden, ist daher auf jeden Fall gerechtfertigt.

12. Die physikalischen Eigenschaften dünnwandiger Schläuche und Arterien

Inhalt: An Arterien und Schläuchen können Radius, Länge und Wanddicke in Abhängigkeit vom Innendruck und von einer äußeren Längskraft gemessen werden. Daraus können Kräfte, Spannungen und Dehnungen in allen Richtungen errechnet werden. Wenn bei Messungen in vivo die Wanddicke nicht gemessen werden kann, sind nur die Kräfte pro Umfangs- und Längeneinheit berechenbar. Man ist jedoch nicht berechtigt, diesen vielfach als „LAPLACE-Spannungen“ bezeichneten Größen eine besondere physikalische Bedeutung beizumessen. Es wird ferner gezeigt, daß auch bei Messungen in vivo die beiden FRANKSchen Modulsysteme gleichberechtigt sind.

Die in der Wand von Schläuchen und Arterien auftretenden Kräfte und Spannungen hängen mit dem dehnbaren Innendruck durch die folgenden Beziehungen zusammen. Es wird hierzu vorausgesetzt, daß das Wanddicken-Radius-Verhältnis klein gegen Eins ist ($h/r \ll 1$) und daß der Schlauch bzw. die Arterie ohne Längsfixation „frei“ gedehnt werden kann. Es existieren demnach keine äußeren Kräfte in Längsrichtung.

Die Gesamtkräfte in Tangential- und Längsrichtung sind daher ausschließlich vom Innendruck abhängig und betragen

$$\begin{aligned} [12,1] \quad K_1 &= rlp \\ K_2 &= r^2\pi p \end{aligned}$$

Diese Größen sind von der Wanddicke unabhängig, da h in den Gleichungen nicht vorkommt. Für den Radius r ist in den Gl. [12,1] bis [12,3] der Innenradius des Schlauchs bzw. der Arterie einzusetzen (WETTERER u. KENNER 1966). Da sich bei Arterien Außen- und Innenradius meist nur um die relativ sehr kleine Wanddicke h unterscheiden, muß dies nicht durch eine besondere Schreibweise gekennzeichnet werden, ist jedoch bei der Untersuchung relativ dickwandiger Schläuche oder Arterien zu berücksichtigen. Berechnet man, ebenfalls ohne Berücksichtigung der Wanddicke, die Tangentialkraft pro Längeneinheit und die Längskraft pro Umfangseinheit, dann erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} [12,2] \quad T_1 &= pr \\ T_2 &= \frac{pr}{2} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden, vor allem in der anglo-amerikanischen Literatur, „LAPLACESches Gesetz“ genannt (BURTON 1954). Die „Spannungen“ T_1 und T_2 sollen daher im folgenden als „LAPLACE-Spannungen“ bezeichnet werden.

Wie schon in Abschnitt 2 angedeutet, sind für das Verhalten eines Materials die auf seinen Querschnitt wirkenden Kräfte maßgebend. Es ist anschaulich verständlich, daß die gleiche Gesamtkraft einen Körper mit kleinem Querschnitt stärker beansprucht als einen solchen mit einem großen Querschnitt. Die Kraft pro Querschnittseinheit ist daher mit Recht als effektive Spannung zu bezeichnen. Die in Tangential- und Längsrichtung eines „frei“ dehnbaren Schlauchs wirkenden Spannungen wurden schon in Abschnitt 1 erwähnt und betragen

$$\begin{aligned} [12,3] \quad \sigma_1 &= \frac{pr}{h} \\ \sigma_2 &= \frac{pr}{2h} \end{aligned}$$

Im Vergleich zu den Tangential- und Längskräften bzw. Spannungen können jene in radialer Richtung vernachlässigt werden, wenn das Wanddicken-Radiusverhältnis des untersuchten Schlauchs klein ist (FRANK 1920, HARDUNG 1964b vgl. Abschnitt 1).

Im Organismus gibt es Arterien, die relativ „frei“ dehnbar sind, wie beispielsweise die geschlängelten Blasen- und Uterusarterien, die Darmarterien und die A. Pulmonalis. Auch der Aortenbogen mag in gewissem Sinn als „frei“ dehnbar bezeichnet werden. Auf diese Arterien können die obigen Gl. [12,1] bis [12,3] angewandt werden, da ihrer Dehnbarkeit in Längsrichtung keine äußere Begrenzung gesetzt ist.

Im Gegensatz dazu befinden sich die meisten Körperarterien in einem Zustand der Längsfixation. Diese Tatsache ist den Anatomen altbekannt, in ihrer physiologischen Bedeutung jedoch noch keineswegs erschöpfend untersucht (BENNINGHOFF 1930). Wenn man dem toten Organismus Arteriensegmente entnimmt, dann verkürzen sich diese und erweisen hierdurch, daß sie sich in situ in einem vorgedehnten Zustand befunden haben. Größenordnungsmäßig kann man die Verkürzung mit rund 30% angeben, im einzelnen zeigen sich jedoch Unterschiede, die von Lebensalter und Versuchsobjekt abhängen. BADER u. KAPAL (1963) fanden an Schweineaorten eine Retraktion von durchschnittlich 24,2%, BERGEL (1961) an Arterien von Hunden etwa 32% bis 42% in Übereinstimmung mit REMINGTONS (1962) Werten von der Bauchaorta des Hundes. An Aorten von Menschen beobachteten SIMON u. MEYER (1958) Werte von 25% bei Jugendlichen, die mit zunehmenden Alter geringer werden und bei 70 jährigen 2% erreichen.

Die auffallend hohen Retraktionswerte von 40% bis 50%, die McDONALD (1960) als normal ansieht, dürften wohl durch postmortale Kontrakturererscheinungen der Muscularis mitbedingt sein, deren Auftreten von JAEGER (1962) und LASZT (1960) beobachtet wurde.

Ohne zunächst nach einer Erklärung dieser Erscheinungen zu suchen, kann man feststellen, daß die in situ bestehende Längsvordehnung der Arterien, zusätzliche Kräfte bzw. Spannungen in der Längswirkung der Arterien bewirken muß, die nicht direkt von deren Innendruck abhängen. Daß ein indirekter Zusammenhang besteht, ist deshalb wahrscheinlich, weil Innendrucksteigerung in einem Arteriensegment sowohl Tangential- als auch Längsdehnung bewirkt, so daß auch die längsfixierten Arterien bei einem bestimmten Innendruck entspannt werden. In diesem Fall hat die erwähnte zusätzliche Längskraft genau wie an einer „frei“ gedehnten Arterie den Wert Null (KENNER 1965).

Die gesamten Kräfte und Spannungen in der Längsrichtung der Arterien bzw. Schlauchwand setzen sich demnach aus der in Gl. [12,1] bis [12,3] angeschriebenen inneren druckbedingten (K , σ) und den durch die Vordehnung bewirkten äußeren (K_a , σ_a) Kräften bzw. Spannungen zusammen.

$$\begin{aligned} K_2 \text{ ges} &= K_2 + K_{2a} \\ T_2 \text{ ges} &= T_2 + T_{2a} \\ \sigma_2 \text{ ges} &= \sigma_2 + \sigma_{2a} \end{aligned}$$

Der Index „ges“ bedeutet gesamte, der Index „a“ äußere Kraft bzw. Spannung. Die Gleichungen für die Kräfte und Spannungen in Tangentialrichtung (Gl. [12,1] bis [12,3]) bleiben auch bei Einwirkungen äußerer Längskräfte unverändert.

In Abschnitt 2 und oben im Zusammenhang mit Gl. [12.3] wurde erwähnt, daß die effektiven Spannungen für das Verhalten der Schlauch- bzw. Arterienwand maßgeblich sind. Für manche Berechnungen ist es von Bedeutung, die Gesamtkräfte oder die „LAPLACE-Spannungen“ zu bestimmen. Jedoch ist es falsch und irreführend, die letztgenannten Größen als allein interessierende (bzw. maßgebende) Spannungen zu bezeichnen, wie es BURTON (1954) tut. Die gleiche „LAPLACE-Spannung“ $T_1 = p \cdot r$ wird ja von einer dickwandigen Arterie leichter ertragen als von einer dünnwandigen (KENNER u. WALDHÄUSL 1964b, WETTERER u. KENNER). Die Erwähnung dieser einfachen Tatsache, an der seit FRANKS Arbeiten keine begründeten Zweifel bestanden, ist notwendig, um Fehlschlüssen aus der Anwendung des sogenannten LAPLACESchen Gesetzes entgegenzutreten. So hatte beispielsweise BURTON (1954) behauptet, daß die Wandspannung in der Aorta um etwa das zehntausendfache höher als die Wandspannung der Kapillaren sei. Doch haben diese imponierenden Zahlenunterschiede der „LAPLACE-Spannungen“ kaum eine physikalische Bedeutung, da sie in erster Linie durch die Größenverhältnisse der Gefäßradien bedingt sind und nichts über die in der dicken Aortenwand bzw. der dünnen Kapillarwand wirkenden effektiven Spannungen aussagen. Die effektive Spannung σ_1 in Tangentialrichtung ist in der Aortenwand höchstens 10 mal so groß wie in der Kapillarwand (WETTERER u. KENNER). Das gleiche gilt auch für die Spannungen in Längsrichtung, die jedoch in der folgenden Tab. 1 nicht angeführt werden brauchen.

Tabelle 1

	Druck dyn/cm ²	Radius cm	Wanddicke cm	effektive Spannung σ_1 dyn/cm ²	„LAPLACE- Spannung“ T_1 dyn/cm
Aorta	$1,3 \cdot 10^6$	1,3	0,2	$8,5 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^5$
mittlere Arterie	$1,3 \cdot 10^5$	0,2	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^3$	$2,6 \cdot 10^4$
Arteriole	$8,0 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$6,0 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^2$
Kapillare	$4,0 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10$
V. Cava	$1,3 \cdot 10^4$	1,6	0,15	$1,4 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^4$

Es wäre allerdings fehlerhaft, auf Grund der eben dargestellten Überlegungen und Argumente des sogenannten „LAPLACESchen Gesetzes“ generell als unzulässig hinzustellen. Die obige Kritik wendet sich vor allem gegen die unrichtigen Folgerungen, die sich zwangsläufig aus Behauptungen wie diese ergeben, daß die „Wandspannung“ der Aorta zehntausend mal höher als jene der Kapillaren sei. Die Anwendung der Gl. [12.2] liegt immer dann nahe, wenn aus methodischen Gründen die Wanddicke h nicht gemessen werden kann, wie dies oft bei in vivo durchgeführten Messungen der Fall ist.

Hiervon abgesehen hängt die Auswahl der in einem bestimmten Fall anzuwendenden Gleichung (Gl. [12.1], [12.2] oder [12.3]) von der Fragestellung ab. Die Arterienwand ist nicht homogen, sondern setzt sich aus elastischen, kollagenen und muskulären Elementen zusammen, die bei Dehnung oder Kontraktion keine zahlenmäßige Änderung erfahren. Wenn man Vorgänge zu untersuchen hat, die von Verhalten und Zustand einzelner Strukturelemente abhängen, ist es korrekt und notwendig, die Gesamtkräfte (Gl. [12.2]) zu berücksichtigen, da sich diese proportional zu den auf die Einzelfasern wirkenden Kräfte

verhalten. Bei der Untersuchung der Tangentialkräfte in längsfixierten Schläuchen ist, wie der Vergleich von [12,1] und [12,2] lehrt, die Berechnung der „LAPLACE-Spannung“ vorzuziehen. Fragestellungen, die diese Vorgangsweise rechtfertigen, betreffen immer einen Vergleich zwischen verschiedenen Dehnungszuständen an einem und demselben Schlauch- bzw. Arteriensegment, wobei das Hauptaugenmerk auf die einzelnen Strukturelemente gelegt ist.

Vergleiche zwischen verschiedenen Arterien, wie sie in Tab. I durchgeführt wurden, ergeben bei Anwendung der „LAPLACE-Spannungen“ immer irreführende Resultate. Auch bei allen Dehnungsversuchen, die das elastische Gesamtverhalten von Arterien und Schläuchen prüfen sollen, ist die Angabe der effektiven Spannungen vorzuziehen. In diesen Fällen wird die Arterienwand in Analogie zur Wand von Gummischläuchen als homogen aufgefaßt.

Die gleichen Überlegungen lassen sich auch auf die Anwendung des kraftbezogenen und des spannungsbezogenen FRANKSchen Modulsystems anwenden. Nur ist hier gerade der Unterschied der Anwendbarkeit im Hinblick auf die Fragestellung wesentlich geringer, da auch die kraftbezogenen Moduln den Materialquerschnitt berücksichtigen. Bezüglich der Berechnung der Moduln ist demnach zu folgern, daß die beiden FRANKSchen Systeme nicht nur mathematisch, sondern auch hinsichtlich biologischer Fragestellungen gleichberechtigt sind.

13. Der Volumenelastizitätsmodul längsfixierter Schläuche

Inhalt: Die Beziehungen zwischen den FRANKSchen Moduln, dem Dehnungspotential des Schlauchwandmaterials und dem Volumenelastizitätsmodul werden abgeleitet. Da die Pulswellengeschwindigkeit der Wurzel aus dem Volumenelastizitätsmodul proportional ist, erhält man auf diese Weise eine exakte Formulierung der MOENSSschen Gleichung.

Für Untersuchungen des Arteriensystems ist die bereits in Abschnitt 1 erwähnte Beziehung zwischen dem Volumenelastizitätsmodul und der Pulswellengeschwindigkeit

$$[13,1] \quad \kappa = \rho c^2$$

von größter Bedeutung, da die Pulswellengeschwindigkeit c in vivo relativ leicht gemessen werden kann. Die Definition des Volumenelastizitätsmoduls nach FRANK (1926a) lautet

$$[13,2] \quad \kappa = \frac{dp}{dV} V$$

Theoretisch läßt sich zeigen, daß Gl. [13,1] für verlustfreie Schläuche unter der Bedingung exakt gilt, daß diese längsfixiert sind und keine pulsatorischen Längsdehnungen aufweisen (v. KRIES 1883, 1892, WETTERER u. KENNER). Somit kann Gl. [13,2] in der Form

$$[13,3] \quad \kappa = \frac{dp}{dr} \cdot \frac{r}{2}$$

angeschrieben werden. Die Längsfixation wird mathematisch durch

$$[13,4] \quad \varepsilon_2 = \frac{dl_2}{l_2} = 0$$

ausgedrückt.

Die in Abschnitt 9 zusammengefaßte Theorie der FRANKSchen Elastizitätsmodul ermöglicht die Berechnung des Volumenelastizitätsmoduls einerseits aus gegebenen Werten der FRANKSchen Moduln und andererseits aus einem gegebenen Dehnungspotential des Schlauchwandmaterials. Mit Hilfe der Gl. [13,1] kann eine exakte Erfassung des Zusammenhanges zwischen den FRANKSchen Moduln und der Pulswellengeschwindigkeit gegeben werden, die nun an Stelle der MOENSSschen Gleichung (Gl. [1,5]) zu treten hat.

Zur Berechnung von κ geht man von den Gl. [9,13] oder [9,14] mit der erwähnten Bedingung [13,4] aus. Für das spannungsbezogene Modulsystem erhält man damit

$$\begin{aligned} [13,5] \quad \frac{dr}{r} &= \alpha_1 d\sigma_1 - \mu'_{12} \alpha_2 d\sigma_2 \\ 0 &= -\mu'_{21} \alpha_1 d\sigma_1 + \alpha_2 d\sigma_2 \end{aligned}$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen wird $d\sigma_2$ berechnet und in die erste Gleichung eingesetzt. Zur Berechnung von $d\sigma_1$ ist Gl. [12,3] heranzuziehen. Da das Schlauchwandmaterial als inkompressibel und volumenkonstant vorausgesetzt wird, ist Gl. [8,5] zu berücksichtigen und ergibt mit Bedingung [13,4] die Gleichung $dr/r = -dh/h$. Somit folgt

$$[13,6] \quad \frac{dr}{r} = \alpha_1 d\sigma_1 (1 - \mu'_{12} \mu'_{21}) = \alpha_1 \frac{pr}{h} \left(2 \frac{dr}{r} + \frac{dp}{p} \right) (1 - \mu'_{12} \mu'_{21})$$

und durch Ausrechnen dieser Gleichung und Einsetzen in Gl. [13,3]

$$[13,7] \quad \kappa = \rho c^2 = \frac{h}{2r \alpha_1 (1 - \mu'_{12} \mu'_{21})} - p$$

Die analoge Gleichung des kraftbezogenen Modulsystems lautet

$$[13,8] \quad \kappa = \rho c^2 = \frac{h}{2r a_1 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} - \frac{p}{2}$$

und ergibt sich analog zu Gl. [13,7] aus den Gl. [9,13], wobei unter der Voraussetzung [13,4] bei dem volumenkonstanten Wandmaterial

$$[13,9] \quad \frac{dK_1}{q_1} = \frac{pr}{h} \left(\frac{dr}{r} + \frac{dp}{p} \right)$$

ist.

FRANK (1920) hat grundsätzlich bereits Gl. [13,8] abgeleitet, jedoch die Querkontraktionszahlen nicht berücksichtigt. Er ging bei der Ableitung von seinem spannungsbezogenen Modul aus und nahm an, daß der untersuchte Schlauch nicht längsfixiert sei. Das Resultat seiner Berechnung

$$[13,10] \quad E = \frac{r}{h} (2\kappa + p)$$

(wobei $E = 1/\alpha_1$) stimmt formal mit der hier abgeleiteten Gleichung für den kraftbezogenen Modul überein, sofern beide Querkontraktionszahlen Null sind. KENNER u. WETTERER (1963) haben sowohl Gl. [13,7] als auch [13,8] abgeleitet, jedoch nicht auf die durch die neue Theorie geforderte Richtungsabhängigkeit der Querkontraktionszahlen geachtet, sondern haben alle Querkontraktionszahlen als gleich groß angenommen. Wie in Abschnitt 9 und 10 gezeigt wurde, haben im allgemeinen alle 4 in den Gl. [13,7] und [13,8] enthaltenen Querkontraktionszahlen verschiedene Werte. Eine Ausnahme bilden isotrope Körper im ungedehnten Zustand, wo man $\mu_{12} = \mu_{21}$ annehmen kann.

Mit Hilfe der Gl. [13,7] oder [13,8] können die Elastizitätsmoduln aus dem Volumenelastizitätsmodul berechnet werden, wobei allerdings vorausgesetzt werden muß, daß auch die Querkontraktionszahlen entweder durch gesonderte

Messung oder durch näherungsweise Schätzung bekannt sind. So kann man beispielsweise bei nicht allzugroßen Dehnungen an Gummischläuchen ohne großen Fehler $\mu'_{12} = \mu'_{21} = 0,5$ setzen, wie dies nach der ursprünglichen Fassung der FRANKSchen Lehre auch für Arterien angenommen wurde (vgl. KENNER u. WETTERER). Es wird sich jedoch später zeigen, daß die Querkontraktionszahlen von Arterien beträchtlich vom Wert 0,5 abweichen.

Nebenbei sei hier erwähnt, daß das Weglassen des Summanden p bzw. $p/2$ in den Gl. [13,7] und [13,8] Fehler bis zu 10% bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls bewirkt. Ein derartiger Fehler ist BERGEL (1961) unterlaufen, der einen differentiellen Modul in einer von LOVE (1927) angegebenen Form angewendet hat. Eine ausführliche Diskussion dieser Fehler wird von WETTERER u. KENNER durchgeführt. An dieser Stelle soll nicht näher darauf eingegangen werden.

Es ist selbstverständlich, daß die beiden Gl. [13,7] und [13,8] für einen bestimmten Schlauch dasselbe κ ergeben müssen. Theoretisch kann man den Nachweis hierfür am besten erbringen, wenn man in jede dieser Formeln die zugehörigen Modulwerte nach Gl. [9,15] bis [9,17] einsetzt. In beiden Fällen erhält man als Resultat den Volumenelastizitätsmodul als Funktion des Dehnungspotentials

$$[13,11] \quad \kappa = \rho c^2 = \frac{V_W}{4 V_0} \cdot \frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right)$$

14. Eindimensionale Dehnung von Gummischläuchen

Inhalt: An Gummischläuchen nimmt die Pulswellengeschwindigkeit mit zunehmender Längsdehnung ab. Dieser Effekt kann mit Hilfe eines Elastomerenmodells der Gummielastizität berechnet werden.

Der einfachste Versuch, der die Brauchbarkeit der theoretisch abgeleiteten Beziehungen zu prüfen gestattet, ist die eindimensionale Längsdehnung eines Gummischlauchs. Man kann hierbei einerseits die Kraft-Längenbeziehung messen und andererseits das Verhalten der Pulswellengeschwindigkeit in dem Schlauch nach Füllung mit Wasser in Abhängigkeit von verschiedenen starken Längsvordehnungen beobachten. Aus den Meßresultaten können die FRANKSchen Elastizitätsmoduln und der Volumenelastizitätsmodul bestimmt werden.

Bei den folgenden Modulmessungen soll nur das spannungsbezogene FRANKSche Modulsystem herangezogen werden.

An einem 1 m langen Stück eines ungefüllten Gummischlauchs (Innendurchmesser 0,3 cm. Außendurchmesser 0,5 cm) wurde durch Anhängen von Gewichten die Kraft-Längenbeziehung gemessen, die in Abb. 5 dargestellt ist und den für Gummi typischen Verlauf zeigt.

BADER u. KAPAL (1960) und KENNER u. WALDHÄUSL (1963) haben beobachtet, daß die Längsdehnung eines Gummischlauchs eine Zunahme seiner tangentialen Dehnbarkeit bewirkt. Auf Grund der einfachen Beziehung (Gl. [13,1]) zwischen Pulswellengeschwindigkeit und Volumenelastizitätsmodul ist ein richtungsmäßig gleiches Verhalten der beiden Größen zu erwarten.

Ein 2 m langes Segment des oben erwähnten Schlauchs wurde bei Innendruck Null mit Wasser gefüllt und an einem Ende mit einem Elektromanometer (System SCHWARZER) verbunden. Am anderen Ende des Schlauchs wurde eine Injektionsspritze angeschlossen, so daß durch schnelle Bewegung des Kolbens Pulsationen erzeugt werden konnten. Da

der Schlauch an beiden Enden geschlossen war, entstanden hier durch Eigenschwingungen, deren Schwingungsdauer T' sich aus Schlauchlänge l und Wellengeschwindigkeit c

$$[14,1] \quad c = 2 \frac{l}{T'}$$

berechnen ließ. Auf Grund dieser Gleichung genügt also zur Bestimmung der Pulswellengeschwindigkeit die Registrierung einer Druckkurve, aus der die Grundswingungsdauer T' abgelesen werden kann.

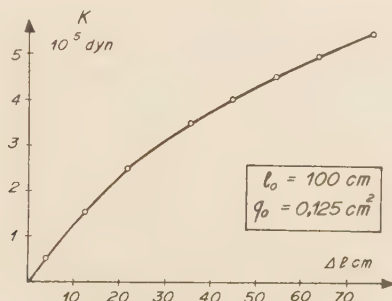


Abb. 5. Experimentell an einem Gummischlauch gewonnene Kraft-Längenkurve.

Auf diese Weise wurde die Pulswellengeschwindigkeit am ungedehnten (2 m langen) Schlauch und nach Dehnung auf 2,5 m, 3,0 m und 3,5 m gemessen. Wie in Abb. 6 zu sehen ist, nimmt c mit zunehmender Längsvordehnung ab. Die Meßwerte von 3 Versuchen sind als Punkte eingetragen.

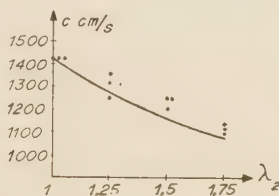


Abb. 6. Verhalten der Pulswellengeschwindigkeit c an einem wassergefüllten Gummischlauch bei verschiedener Längsdehnung. $\lambda_2 = l/l_0$ relative Länge. Die Punkte sind experimentell bestimmt, die ausgezogene Kurve ist nach Gl. [14,5] berechnet.

Mit Hilfe der Gl. [12,12] kann man prüfen, ob dieses experimentelle Resultat durch die Theorie bestätigt werden kann. Für einen aus langen Molekülketten bestehenden homogenen dehnbaren Stoff konnte auf Grund statistisch-thermodynamischer Überlegungen das Dehnungspotential

$$[14,2] \quad W = \frac{1}{2} G \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right)$$

berechnet werden (TRELOAR 1958). In dieser Gleichung, deren Anwendung auf biologische Probleme zuerst von LEWI u. SCHAPER (1964) vorgeschlagen wurde, bedeutet G eine thermodynamische Konstante, die von der absoluten Temperatur und der Zahl der Moleküle pro Volumeneinheit abhängt. In Gl. [14,2] ist bereits die Inkompressibilität des Materials

berücksichtigt. Da bei den beschriebenen Versuchen ausschließlich die Wirkung der Längsdehnung untersucht wurde, besteht zwischen den relativen Längen die Beziehung

$$[14,3] \quad \lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda_2}$$

Wenn man Gl. [14,3] in Gl. [14,2] und die letztere in Gl. [13,11] einsetzt, dann erhält man den Volumenelektizitätsmodul als eine sehr einfache Funktion der relativen Länge

$$[14,4] \quad \kappa = \frac{V_W}{V_0} \cdot \frac{G}{\lambda_2}$$

V_W ist das konstante Volumen der Schlauchwand, V_0 das Innenvolumen des ungedehnten Schlauchs. Da diese beiden Größen und auch G konstant sind, ergibt sich auf Grund der Gl. [13,1] die folgende Abhängigkeit der Pulswellengeschwindigkeit von der relativen Länge λ_2 des Schlauchs

$$[14,5] \quad c = c_0 \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}}$$

c_0 ist die gemessene Wellengeschwindigkeit im ungedehnten Schlauch.

Die nach Gl. [14,5] berechneten Werte der Wellengeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Längsdehnung sind in Abb. 6 als ausgezogene Linie eingetragen. Die Übereinstimmung des experimentell beobachteten Verhaltens mit dem Ergebnis der Berechnung erweist die Brauchbarkeit der theoretischen Überlegungen, die einerseits zu Gl. [13,11] und andererseits zur Aufstellung des Potentials Gl. [14,2] geführt haben. Außerdem zeigt die Rechnung, daß gedehnter Gummi offenbar nicht mehr als isotrop aufgefaßt werden kann, da sich die Dehnbarkeit in verschiedenen Richtungen unterschiedlich verhält.

Dies läßt sich noch deutlicher zeigen, wenn man aus den Meßergebnissen die Elastizitätsmoduln bestimmt (KENNER 1964b). Das Verhalten des FRANKSchen Moduls ϵ_2 in Längsrichtung kann aus der Kraft-Längenkurve der Abb. 5 unter Berücksichtigung der Volumenkonstanz des Wandmaterials bestimmt werden. Für die Tangentialrichtung kann der Modul ϵ_1 an Hand der Gl. [13,1] und [13,7] aus der Pulswellengeschwindigkeit berechnet werden. In Gl. [13,7] ist hierzu entsprechend dem experimentellen Vorgehen $p = 0$ zu setzen. Für die Querkontraktionszahlen kann man, wie noch weiter unten gezeigt wird, bei nicht allzugroßen Dehnungen von Gummi näherungsweise 0,5 setzen, so daß in Gl. [13,7]

$$[14,6] \quad \mu'_{12} \mu'_{21} = \frac{1}{4}$$

geschrieben werden kann.

Das Ergebnis der Messung ist in relativen Werten, bezogen auf die Modulwerte im ungedehnten Zustand in Abb. 7 gezeigt. Auch hier kann man unter Benützung des Potentials [14,2] einen Vergleich mit der Theorie durchführen. Setzt man dieses Potential in die in Abschnitt 9 abgeleiteten Gl. [9,16] ein und berücksichtigt wieder Gl. [14,3], dann erhält man die Abhängigkeit der Moduln ϵ_1 und ϵ_2 von einer ausschließlichen Längsdehnung

$$[14,7] \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 2G \frac{1 - 2\lambda_2^3}{\lambda_2(1 + \lambda_2^3)}$$

$$[14,8] \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\alpha_2} = 2G \left(\lambda_2^3 + \frac{1}{2} \lambda_2 \right)$$

Das Ergebnis der Berechnung ist in Abb. 7 eingezeichnet und zeigt ebenfalls eine richtungsmäßig gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. Die Abwei-

chungen rühren vor allem daher, daß das theoretisch nach Gl. [14.2] berechnete Dehnungspotential das Verhalten von Gummi bei großen Dehnungen nur näherungsweise wiederzugeben vermag.

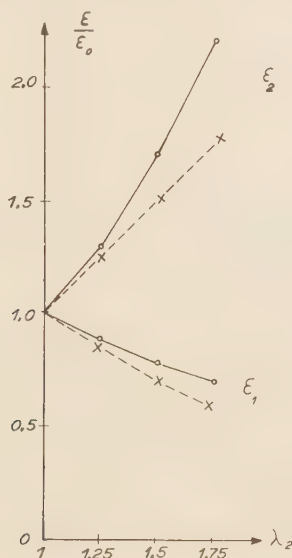


Abb. 7. Abhängigkeit des spannungsbezogenen FRANKschen Moduls in Tangentialrichtung (E_2) und in Längsrichtung (E_1) von der relativen Längsvordehnung λ_2 eines Schlauches. Die Moduln (Ordinate) sind auf die Ausgangswerte bezogen. Strichliert: Experimentell gewonnene Werte, ausgezogen: nach Gl. [14.7] und [14.8] berechnet. Nach KENNER (1964b).

Zusammenfassend ergibt sich, daß eindimensionale Dehnung von Gummi eine Zunahme des Moduls E_2 in Dehnungsrichtung und eine Abnahme des Moduls E_1 in der hierzu senkrechten Richtung bewirkt.

15. Mehrdimensionale Dehnung von Gummischläuchen

Inhalt: Der Verlauf der Druckvolumenkurven von Gummischläuchen hängt von der bestehenden Längsvordehnung ab. Die Querkontraktionszahl der Schlauchwand nimmt mit zunehmender Dehnung ab.

Die Druck-Volumenkurve von Arterien oder Schläuchen ist auch unter der Bezeichnung „Dehnungscharakteristik“ bekannt, da man sie als charakteristisch für das elastische Verhalten dieser Objekte hielt. Die im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Versuche zeigten jedoch, daß sich bei Längsvordehnung eines Schlauchs dessen tangentielle Dehnbarkeit verändert. Es ist daher zu erwarten, daß hierbei auch eine Änderung im Verlauf der Druck-Volumenkurve eintritt, wodurch der Verlauf der „Charakteristik“ von der gegebenen Vordehnung in Längsrichtung abhängig wird. Auf diese Weise kann man für jeden Schlauch eine beliebige Anzahl von „Charakteristiken“ registrieren.

Zur Registrierung der Druck-Volumenkurven eines Gummischlauchs wurde folgende Versuchsanordnung gewählt. Ein 30 cm langer Gummischlauch (Ausgangswerte im ungedehnten Zustand: Innendurchmesser 0,3 cm, Außendurchmesser 0,5 cm) wurde an einem Ende an ein Elektromanometer (SCHWARZER),

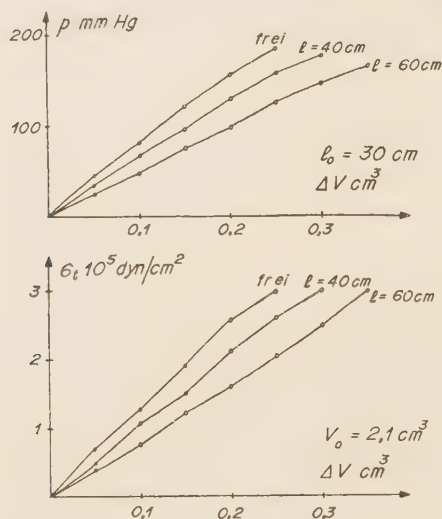


Abb. 8. Oben: Druckvolumenkurven eines Gummischlauch-Segments bei verschiedener Längsvordehnung. Die Kurven bedeuten von links nach rechts: „freie“ Dehnung bei einer Ausgangslänge $\ell_0 = 30 \text{ cm}$; Dehnung nach Längs-Streckung auf 40 cm; Dehnung nach Längs-Streckung auf 60 cm. Mit zunehmender Längsvordehnung wird die Weibbarkeit des Schlauchs erhöht. Unten: Tangentialspannung-Volumenkurven, aus den Daten der Druck-Volumenkurven berechnet.

am anderen Ende an eine Infusionspumpe angeschlossen, die mit konstanter einstellbarer Geschwindigkeit Flüssigkeit in den Schlauch pumpte. Auf diese Weise konnten Druck-Volumenkurven registriert werden. Dieser Versuch wurde bei Ausgangslänge und bei verschieden starker Längsdehnung des Schlauchs durchgeführt.

In Abb. 8 ist ein Beispiel einer derartigen Versuchsreihe gezeigt. Man erkennt, daß die Druck-Volumenkurve, wie erwartet, um so flacher verläuft, je größer die gewählte Längsvordehnung des Schlauchs ist. Demnach bewirkt die Streckung in Längsrichtung eine Erhöhung der Volumendehnbarkeit in dem untersuchten Druckbereich. Bei Innendruck Null bewirkt die Längsdehnung praktisch keine, d. h. keine meßbare Vergrößerung des Innenvolumens V . Je höher der Innendruck p ist, desto größer wird die durch eine Längsdehnung bewirkte Volumenzunahme.

Von den verschiedenen elastischen Größen, die auf Grund des in Abb. 8 gezeigten Versuchs berechnet werden können, sei als einfaches Beispiel die Querkontraktionszahl μ'_{12} herausgegriffen. Zur Berechnung geht man von den Gl. [9,14] aus. Hält man σ_1 konstant, dann ist $d\sigma_1 = 0$ und es folgt

$$[15,1] \quad \mu'_{12} = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Da bei beliebigen Dehnungen eines Schlauchs die Beziehung

$$[15,2] \quad \frac{dV}{V} = 2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

gilt, erhält man durch Einsetzen

$$[15,3] \quad \mu'_{12} = \frac{\varepsilon_2 - \left(\frac{dV}{V} \right)_{(\sigma_1 = \text{const})}}{2 \varepsilon_2}$$

wobei dV/V die relative Volumenänderung des Schlauchinnenraumes unter Voraussetzung konstanter Tangentialspannung, und $\varepsilon_2 = dl/l$ die relative Längenänderung des Schlauchs unter der gleichen Voraussetzung ist. Beide Änderungen sind durch eine kleine Spannungszunahme in Längsrichtung bewirkt.

Der einfachste Fall konstanter Tangentialspannung ist $\sigma_1 = 0$, d. h. reine Längsdehnung bei Innendruck Null. Wie schon angedeutet, ändert sich bei reiner Längsdehnung das Innenvolumen des Schlauchs praktisch nicht, so daß in Gl. [15,3] $dV/V = 0$ zu setzen ist, womit sich für μ'_{12} der Wert 0,5 ergibt. Bei Messungen an längeren Schlauchsegmenten haben KENNER u. WALDHÄUSL (1963) Werte von $\mu'_{12} = 0,495$ gefunden.

Um die Querkontraktionszahl bei höheren Tangentialspannungen berechnen zu können, muß aus dem Druck-Volumendiagramm der Abb. 8 das Tangentialspannungs-Volumendiagramm errechnet werden. Hierzu ist Gl. [12,3] anzuwenden und die Bedingung der Konstanz des Wandvolumens V_W zu berücksichtigen. Das Ergebnis der Berechnung ist in Abb. 8 unten gezeigt. Die aus dieser Abbildung mit Hilfe der Gl. [15,3] bestimmten Querkontraktionszahlen sind in Tab. 2 in Abhängigkeit von den relativen Innenvolumina V/V_0 des Schlauchs zusammengefaßt.

Tabelle 2

V/V_0	1,0	1,035	1,07	1,10	1,14
μ'_{12} gemessen	0,5	0,49	0,48	0,47	0,45
μ'_{12} berechnet	0,5	0,48	0,47	0,45	0,435

Zur Prüfung, ob sich auch bei diesem Experiment eine Übereinstimmung mit der Theorie zeigt, kann man wieder das Dehnungspotential Gl. [14,2] nach TRELOAR (1958) heranziehen. Wenn man dieses in die Gl. [9,16] für μ'_{12} einsetzt, erhält man

$$[15,4] \quad \mu'_{12} = \frac{1}{1 + (\lambda_1^2 \lambda_2)^2}$$

wobei, wie leicht zu zeigen ist, $\lambda_1^2 \lambda_2 = V/V_0$ bedeutet. Ein Vergleich der in Tab. 2 zusammengestellten experimentell gemessenen und berechneten Werte zeigt eine richtungsmäßige Übereinstimmung. Die Querkontraktionszahlen werden demnach mit zunehmender Dehnung kleiner. An dem berechneten Resultat Gl. [15,4] ist vor allem interessant, daß die Querkontraktionszahl ausschließlich von den relativen Volumina V/V_0 abhängt. Aus dem Ergebnis ist zu folgern, daß die Beeinflussung des Schlauchradius durch eine Längsdehnung um so geringer ist, je größer die bereits bestehende Längsdehnung ist; die Kopplung zwischen Längs- und Tangentialdehnung wird also mit zunehmender Längsdehnung geringer.

Damit wird auch bestätigt, daß bei mehrdimensionalen Dehnungen von Gummischläuchen eine Anisotropie auftritt. Diese hat zur Folge, daß der Verlauf der Druck-Volumenkurven von der Vordehnung in Längsrichtung abhängt. Das Dehnungsverhalten von Schläuchen kann daher erst durch eine Schar von Dehnungskurven hinreichend „charakterisiert“ werden. Selbstverständlich kann man daher nicht allein die „freie“ Dehnungskurve als die Charakteristik bezeichnen.

16. Die Querkontraktionszahl der Arterienwand

Inhalt: An Arterienstreifen wird die Querkontraktionszahl als Funktion der Längsdehnung gemessen. Im Gegensatz zu früheren Annahmen in der Literatur werden Zahlen bis unter 0,2 beobachtet. Erst mit zunehmender Dehnung werden die Querkontraktionszahlen größer.

Wie schon mehrfach erwähnt, wurde seit den Untersuchungen FRANKS angenommen, daß die Querkontraktionszahl der Arterienwand in allen Richtungen 0,5 betrage. Durch den Nachweis, daß die Arterienwand praktisch inkompressibel sei, wurde dieses Ergebnis auf Grund der in Abschnitt 3 dargestellten Argumentation anscheinend bestätigt (LAWTON 1954). FRANK (1906) selbst hatte seine Annahme ebenfalls darauf gestützt, daß die Arterienwand infolge ihres hohen Wassergehalts inkompressibel sein müsse und glaubte überdies, seine an Gummi gewonnenen Ergebnisse auf Arterien übertragen zu können.

Wie in Abschnitt 15 an Gummischläuchen gezeigt wurde, gilt das Resultat $\mu'_{12} = 0,5$, das schon von FRANK (1906) beobachtet worden war, mit hinreichender Genauigkeit nur unter der Voraussetzung eindimensionaler Dehnung. Besteht eine Vordehnung wie etwa im Arteriensystem durch die Wirkung des arteriellen Drucks, dann weicht auch bei Gummi die Querkontraktionszahl von 0,5 ab.

Die Messung der Querkontraktionszahl μ'_{12} an Arterien kann ebenso wie bei Gummischläuchen aus dem Verhalten des Innenvolumens bei Längsdehnung erfolgen. BADER u. KAPAL (1964) haben an Schweineaorten beobachtet, daß sich diese beim Herausschneiden aus dem Situs um durchschnittlich 24% verkürzen. Dehnt man das retrahierte Gefäß wieder auf die in-situ-Länge, also bezogen auf die retrahierte Länge um 32%, dann ist eine Vergrößerung des Innenvolumens des Arteriensegments um 20% zu beobachten. Allein aus der Tatsache, daß sich bei reiner Längsdehnung von Arteriensegmenten im Gegensatz zum Verhalten von Gummischläuchen das Innenvolumen vergrößert, kann man schließen, daß die Querkontraktionszahl kleiner als 0,5 sein muß.

Aus den oben angegebenen Durchschnittszahlen von BADER u. KAPAL ergibt sich

$$[16,1] \quad \epsilon_2 = 0,32 \text{ und } \frac{dV}{V} = 0,20$$

Setzt man diese Werte in Gl. [15,3] ein, dann erhält man

$$[16,2] \quad \mu'_{12} = 0,19$$

Dieser Wert zeigt die Größenordnung der an Arterien bei eindimensionaler Dehnung zu beobachtenden Querkontraktionszahlen. Eine früher von KENNER u. WALDHÄUSL (1963) vorgeschlagene Gleichung, die sich durch Integration

der Gl. [15,4] bei Voraussetzung einer konstanten Querkontraktionszahl in dem untersuchten Dehnungsbereich ergibt, führt zu dem gleichen Resultat. Man kann jedoch nicht voraussetzen, daß bei Dehnungen um 20% der Ausgangslänge die beschriebene Querkontraktionszahl konstant ist. Daher sind bei Messungen mit kleineren Dehnungsschritten Abweichungen von dem Ergebnis [16,2] zu erwarten.

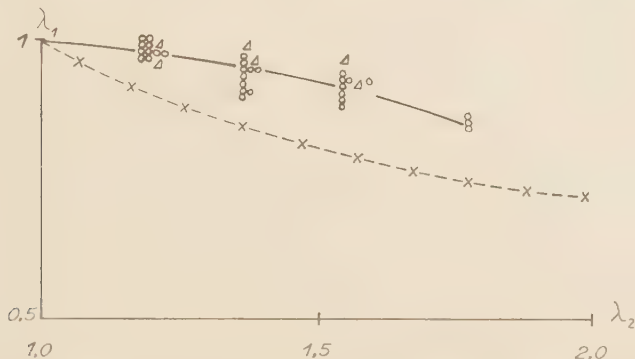


Abb. 9. Abhängigkeit der relativen Breite λ_1 von der relativen Länge λ_2 an Gummistreifen (Sternchen) und an 10 Streifen von Rinder-carotiden (obere Kurve). Die für Gummi berechnete Kurve (strichliert) stimmt sehr genau mit den Meßwerten überein. Nähere Beschreibung im Text. Nach KENNER u. WALDHÄUSL (1964a).

KENNER u. WALDHÄUSL (1964a) haben in eigenen Versuchen an ausgeschnittenen Streifen von Rinder-carotiden die Querkontraktionszahl gemessen. Die einfachste und direkteste Methode, diese Messungen durchzuführen, besteht darin, daß man ein rechteckiges Stück des Materials in einer Richtung dehnt und die Verschmälerung in der hierzu senkrechten Richtung beobachtet. Das Ergebnis dieser Versuche ist in Abb. 9 dargestellt. Als Kontrollversuch wurde ein Gummistreifen in Längsrichtung gedehnt und die Verkürzung in der Breite gemessen. λ_2 bedeutet die relative Dimension in der Längsrichtung, λ_1 jene in der Breite. Der an Gummi registrierte Querkontraktionsverlauf ist in Abb. 9 durch Sternchen gekennzeichnet. Theoretisch ergibt sich für einen in Richtung 2 gedehnten gummiartigen volumenkonstanten Körper nach Gl. [14,3] die Abhängigkeit

$$[16,3] \quad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$$

Die nach dieser Gleichung berechnete Kurve ist in Abb. 9 strichliert eingezeichnet und stimmt erwartungsgemäß äußerst genau mit der an Gummi gemessenen Kurve überein.

Die an 10 Arterienstreifen gewonnene Abhängigkeit der relativen Breite λ_1 von der relativen Länge ist in Abb. 9 ausgezogen gezeichnet. In einigen Versuchen wurde die Verkürzung in Längsrichtung bei Dehnung in die Breite gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in Abb. 9 als Dreiecke eingetragen und weichen kaum von den durch Punkte dargestellten Ergebnissen der Längsdehnung ab. Die Kurve der durchschnittlichen Werte liegt deutlich über jener von Gummi.

Aus den Kurven dieser Abb. kann die Querkontraktionszahl

$$[16,4] \quad \mu'_{12} = - \frac{d\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{d\lambda_1}$$

berechnet werden. Für die eindimensionale Dehnung des Gummistreifens ergibt sich der Wert 0,5. Für die an den Arterienstreifen gewonnenen Resultate ergibt sich die folgende Abhängigkeit von der relativen Länge:

Tabelle 3

λ_2	1,0 bis 1,2	1,2 bis 1,4	1,4 bis 1,6	1,6 bis 1,8
μ'_{12}	0,14	0,25	0,44	0,50

Die Übereinstimmung mit dem nach Messungen von BADER u. KAPAL an Schweineaorten berechneten Wert Gl. [16.2] ist im Dehnungsbereich von 20% gut. Diesen Wert hat die Querkontraktionszahl auch unter „physiologischen“ Verhältnissen, weicht also ganz beträchtlich von dem üblicherweise angenommenen Wert 0,5 ab.

Das Verhalten der Querkontraktionszahlen der Arterienwand bei mehrdimensionalen Dehnungen läßt sich nur mit einer relativ komplizierten Methodik erfassen, die im folgenden beschrieben wird.

17. Untersuchung der statischen Elastizität von Arterien

Inhalt: Es wird eine Methodik zur Messung der in Abschnitt 12 erläuterten Größen an Arteriensegmenten beschrieben, die eine vollständige Charakterisierung der elastischen Eigenschaften ermöglicht.

In den vorangehenden Abschnitten wurden zur Einführung in die Methodologie der Untersuchung von Arterien und Schläuchen relativ einfache Probleme dargestellt. Eine vollständige Analyse der Dehnbarkeit von Arterien hat zum Ziel, alle Moduln und Querkontraktionszahlen der Arterienwand in Abhängigkeit von den Dehnungen oder Kräften (bzw. Spannungen) zu messen. Bei eindimensionalen Dehnungen genügt es, das Verhalten der Länge und Breite eines Streifens als Funktion der einwirkenden Kraft zu prüfen. Bei zweidimensionalen Dehnungen, wie sie an Schläuchen vorliegen, muß zu diesen Größen noch die Kraft oder Spannung in der zweiten Dehnungsrichtung gemessen werden.

Wie in Abschnitt 1 dargestellt, wurde diese Forderung bisher von keinem Untersucher vollständig erfüllt. BERGEL (1961) hat zwar auf Unterschiede der Druck-Volumenkurve von Arterien bei „freier“ Dehnung gegenüber Dehnungen bei Längsfixation hingewiesen. BADER u. KAPAL (1960, 1964) haben sowohl an Gummischläuchen als auch an Schweineaorten Dehnungsversuche bei verschiedenen Längsvordehnungen durchgeführt und ebenfalls deutliche Unterschiede beobachtet. Alle Autoren haben jedoch eine eingehendere Analyse dieser Befunde unterlassen und vor allem keine Messungen der äußeren Längskraft durchgeführt.

Diese Tatsache ist um so bemerkenswerter, als die Literatur über das Dehnungsverhalten von Arterien äußerst umfangreich ist (vgl. Abschnitt 1). Abgesehen von Dehnungsversuchen an Arterienstreifen, die immer nur ein-

dimensionale Dehnungen zu prüfen gestatten, besteht die Methode meist darin, daß Arteriensegmente entweder „frei“ oder in einer bestimmten Längsfixation durch Innendrucksteigerung gedehnt werden. Es resultiert eine Druck-Volumenkurve, die als „Dehnungscharakteristik“ bezeichnet wird. Allein diese Bezeichnung zeigt, daß nie auf eine etwaige gegenseitige Beeinflussung von Längs- und Tangentialdehnung geachtet wurde (vgl. Abschnitt 15).

Es soll nun die Methodik beschrieben werden, mit der die weiter unten zu besprechenden Versuche an Arterien durchgeführt werden können. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 10 schematisch dargestellt. Das Arteriensegment A ist an die Motorinfusionspumpe MP angeschlossen, die mit konstanter Geschwindigkeit (1 bis 5 cm³/min) Flüssigkeit (Macrodex in 0,9% NaCl) in die Arterie pumpt. Der Druck in der Arterie wird mit dem Manometer M₁ (SCHWARZER) fortlaufend gemessen. Das Innenvolumen der Arterie bei Füllungsdruck Null wird aus Länge und Radius berechnet und außerdem zur Kontrolle aus dem Volumen entnommen, das von der Pumpe in die vorher vollständig entleerte Arterie ohne Drucksteigerung gefüllt wird.

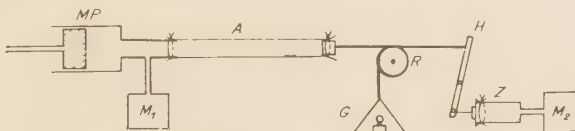


Abb. 10. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung zur Registrierung von Druckvolumenkurven mit gleichzeitiger Messung der äußeren Längskraft bei verschiedener Längsvordehnung an Arteriensegmenten. A: Arterie, G: Gewicht, H: Hebel, M₁ und M₂: Manometer, MP: Motorpumpe, R: Rolle zum Anbringen der Eichgewichte, Z: Zylinder. Ausführliche Beschreibung im Text.

Am anderen Ende (rechts) ist die Arterie an einen Kraftmesser K angeschlossen. Dieser besteht, wie in Abb. 10 gezeigt ist, aus einem zweiarmligen Hebel mit einstellbarem Übersetzungsverhältnis, der bei Zug am Hebelarm II einen Druck auf den mit einer Gummimembran abgeschlossenen Zylinder Z ausübt. Die an Hebelarm H ausgeübte Zugkraft wird somit in Druck umgewandelt und mit Manometer M₂ (gleiches Fabrikat wie M₁) fortlaufend registriert. Die Schreibung erfolgt mit einem Direktschreiber (SCHWARZER). Die Eichung des Kraftmessers K erfolgt einfach durch Anhängen von Gewichten G an den Hebel H über eine Rolle R.

Wanddicke, Länge und Radius der Arterie werden im ungefüllten entspannten Zustand mit Schublehre bzw. Maßstab gemessen.

Mit dieser Versuchsanordnung kann einerseits die „freie“ Dehnung der Arterie ohne Einwirkung einer äußeren Kraft und ohne Vordehnung in Längsrichtung registriert werden. Bei Druckerhöhung schlängelt sich die Arterie infolge der durch die inneren Kräfte erzeugten Längsdehnung. Andererseits kann durch Wahl des Abstandes zwischen der Pumpe MP und dem Kraftmesser K bei Innendruck Null jede beliebig wählbare Vordehnung der Arterie in Längsrichtung eingestellt werden.

Die Methodik ermöglicht also, folgende Größen zu messen: Die oben erwähnten Werte r_0 , l_0 und h_0 , die vorgedehnte Länge l , ferner den Innendruck p und die äußere Längskraft K_{sa} sowie den von der Pumpe erzeugten Volumenzuwachs. Da zur weiteren Auswertung der Ergebnisse das spannungsbezogene FRANKSche Modulsystem herangezogen wird, sind folgende Gleichungen zu berücksichtigen:

$$[17,1] \quad \sigma_1 = pr/h$$

$$[17,2] \quad \begin{cases} \sigma_{2\text{ges}} = \frac{pr}{2h} + \sigma_{2a} \\ \sigma_{2a} = K_{2a}/2 r \pi h \end{cases}$$

$$[17,3] \quad \lambda_1 = r/r_0$$

$$[17,4] \quad \lambda_2 = l/l_0$$

Aus der Annahme, daß das Wandvolumen V_W bei allen Dehnungen konstant bleibt, erhält man

$$[17,5] \quad V_W = 2 r \pi h l = 2 r_0 \pi h_0 l_0$$

und da

$$[17,6] \quad V = r^2 \pi l$$

ergibt sich

$$[17,7] \quad \frac{r}{h} = \frac{2 V}{V_W}$$

zum Einsetzen in Gl. [17,1] und

$$[17,8] \quad 2 r \pi h = \frac{V_W}{l}$$

zum Einsetzen in Gl. [17,2]. Außerdem kann man noch aus Gl. [17,6]

$$[17,9] \quad \frac{r}{r_0} = \sqrt{\frac{V l_0}{V_0 l}}$$

errechnen, wobei V_0 das Füllungsvolumen im entspannten Zustand bei Innendruck Null ist.

Auf Grund der Beziehungen [17,5] bis [17,9] kann man die in den Gl. [17,1] bis [17,4] aufgezählten Größen, die zur Modulbestimmung notwendig sind, direkt aus den Meßwerten errechnen. In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Messung und deren Auswertung besprochen. Zunächst wird auf den Verlauf der Druck-Volumenkurven und auf einfache Folgerungen eingegangen, die sich aus den Registrierungen ableiten lassen. Dann werden die registrierten Kurven mit theoretisch berechneten verglichen und schließlich werden die FRANKSchen Moduln nach der in Abschnitt 9 definierten Methode bestimmt.

18. Die Druck-Volumenkurven von Arterien

Inhalt: Die Druck-Volumenkurve eines Arteriensegments wird mit zunehmender Längsdehnung gegen größere Volumina verschoben. Dieses Verhalten hängt mit der niedrigen Querkontraktionszahl zusammen. Bei der freien Dehnung nicht längsfixierter Arterien durch Innendrucksteigerung nehmen Radius und Länge zu.

Mit der in Abschnitt 17 beschriebenen Methode wurden Versuche an 10 Rindercarotiden durchgeführt. Diese wurden nach der Entnahme aus eben geschlachteten Rindern von Bindegewebe befreit und durch Ligatur abzweigender Arterienäste abgedichtet. Nach Anbringen an die beschriebene Apparatur wurden mehrere Dehnungszyklen durchgeführt, wobei jedesmal eine „freie“ Dehnung und eine oder mehrere Dehnungen bei verschiedenen fixierten Längen

durchgeführt wurden. Über einige Teilergebnisse dieser Versuche wurde bereits kurz berichtet (KENNER 1965).

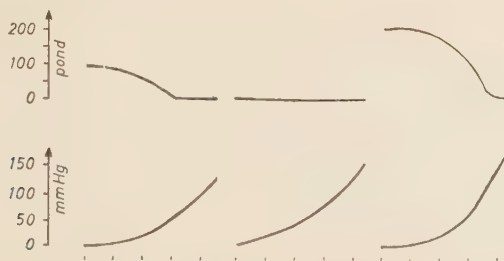


Abb. 11. Originalregistrierung. Oben: Äußere Längskraft K_{ga} . Unten: Druck p . Zeitschreibung: 1 min. Die Infusionsgeschwindigkeit beträgt 5 ml/min. Ruhelänge des untersuchten Arteriensegments: 24 cm. Links: Registrierung nach Vordehnung auf 30 cm. Mitte Registrierung bei „freier“ Dehnung. Die äußere Längskraft hat den Wert Null. Rechts: Registrierung nach Vordehnung auf 34,5 cm. Die Vordehnungen bewirken eine Erhöhung der äußeren Längskraft (oben), die mit zunehmendem Innendruck (unten) wieder abfällt. Die Druckvolumenkurven verlaufen nach Vordehnung im Anfangsteil deutlich flacher als bei „freier“ Dehnung.

In Abb. 11 ist die Wiedergabe von Originalkurven gezeigt, wobei oben das Verhalten der äußeren Längskraft und unten das Verhalten des Innendruckes in Abhängigkeit vom Innenvolumen zur Darstellung kommt.

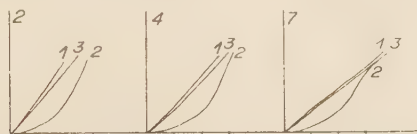


Abb. 12. Übereinanderprojizierte Druckvolumenkurven einer Rindercarotis. Ausgangslänge 22 cm. Die Zahlen 2, 4 und 7 bezeichnen die laufende Nummer des Dehnungszyklus. Innerhalb jedes Zyklus bedeutet 1, „freie“ Dehnung, 2, nachfolgende Druckvolumenkurve nach Längsstreckung auf 31 cm und 3, Wiederholung der „freien“ Dehnung. Die Nachdehnungserscheinungen sind an dem Unterschied zwischen den Kurven 1 und 3 zu erkennen, der von Zyklus zu Zyklus geringer wird. Beschreibung im Text.

Abb. 12 zeigt einen Teil einer Versuchsreihe unter Weglassung der Kraftregistrierung. Es fällt zunächst auf, daß sich die Kurven von Zyklus zu Zyklus immer mehr gegen die Volumenachse neigen. Diese Erscheinung ist durch die sogenannte Nachdehnung bedingt, die hier nicht näher untersucht werden soll. Vor allem befindet sich an frisch ausgeschnittenen Arterien die Muscularis in Kontraktur (LASZT 1960), die erst nach mehreren Dehnungszyklen überwunden werden kann. Den schließlich erreichbaren relativ stabilen Zustand bezeichnet man als „akkommodiert“. Da Nachdehnungserscheinungen innerhalb eines Zyklus („freier“ und längsfixierter Dehnungen) auf Berechnungen störend wirken, soll im folgenden nur der „akkommodierte“ Zustand eingehender untersucht werden. Dieser ist daran zu erkennen, daß die vor und nach mehreren in Längsfixation durchgeführten Dehnungen registrierten „freien“ Druckvolumenkurven übereinstimmen.

Der auffallendste Befund an den einzelnen Zyklen der Abb. 12 ist, daß die Druckvolumenkurven bei Längsvordehnung gegenüber den bei „freier“, nicht längsfixierter Dehnung registrierten vor allem im niederen Druckbereich gegen größere Volumina verschoben werden. Dies steht im Gegensatz zu dem Ver-

halten von Gummischläuchen, die, wie in Abschnitt 15, Abbildung 8 gezeigt, bei Innendruck Null keine Volumenvergrößerung infolge einer reinen Längsdehnung aufweisen.

Bei „freier“ Dehnung bewirkt eine Innendrucksteigerung sowohl eine Zunahme des Radius als auch der Länge in etwa dem gleichen Verhältnis. Erreicht also eine Arterie bei einem Druck p_x die Länge l_x , dann ist es bei weiterer Drucksteigerung gleichgültig, ob die Arterie vorher in der Länge l_x fixiert war oder nicht. Sowohl bei „freier“ als auch bei längsfixierter Dehnung wird sich die Arterie bei Überschreiten des für jede Länge l_x charakteristischen Druckes p_x über die Länge l_x verlängern und sich schlängeln. Diese Überlegung erklärt, warum letztlich alle Dehnungskurven an einem bestimmten Punkt in die „freie“ Dehnungskurve übergehen. Merkwürdigerweise haben BADER u. KAPAL (1964) bei ihren Versuchen an Schweineaorten nicht auf diesen Befund geachtet.

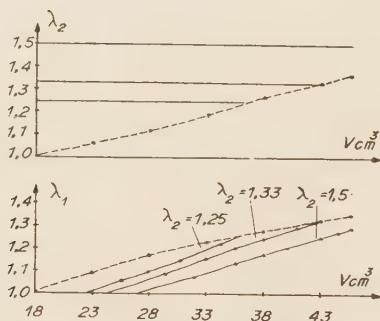


Abb. 13. Abhängigkeit der relativen Längen λ_2 (oben) und der relativen Umfangswerte λ_1 (unten) vom Innenvolumen (Abszisse) eines Arteriensegments bei „freier“ Dehnung (strichliert) und bei drei verschiedenen Längsdehnungen (ausgezogen). Die Ausgangslänge des Segments beträgt $l_0 = 24$ cm, die vorgedehnten Längen 30, 32 und 36 cm.

In Abb. 13 sind als Ergebnis eines Versuches die relativen Längen in Tangentialrichtung λ_1 und in Längsrichtung λ_2 in Abhängigkeit von dem Innenvolumen eines Arteriensegments gezeigt. Die Volumenerhöhung wurde bei „freier“ Dehnung und bei drei verschiedenen Längsfixationen durch Innendrucksteigerungen bewirkt. Die „freien“ Dehnungskurven (strichliert) zeigen, daß die Längs- und Tangentialdehnung gleichzeitig zunehmen. Bei „freier“ Dehnung wirkt keine äußere Kraft. Nach Gl. [17,2] und [12,3] ist daher die Längsspannung σ_2 genau halb so groß wie die Tangentialspannung σ_1 . Da durch diese beiden senkrecht zueinander stehenden Spannungen in jeder der beiden Richtungen gleiche relative Verlängerungen bewirkt werden, schloß FRANK (1926b), dem dieses Verhalten von Arterien bei freier Dehnung bereits bekannt war, daß die Dehnbarkeit in Längsrichtung doppelt so groß sei wie in Tangentialrichtung.

Daß die Verhältnisse nicht so einfach liegen, zeigen die bei Längsfixation aufgenommenen Kurven. λ_2 hat dabei zunächst einen konstanten Wert, eben die vorgegebene Längsdehnung. Die Dehnungskurven in Tangentialrichtung weisen einen gegenüber der „freien“ Dehnung steileren Anstieg auf. Die „längsfixierten“ Kurven münden jeweils an jenem Punkt in die „freie“, an dem wie

oben erwähnt der Druck p_x erreicht wird. Das Ergebnis zeigt, daß die Dehnbarkeit in Tangentialrichtung beträchtlich durch eine Vordehnung in Längsrichtung beeinflußt wird.

Zur Bestimmung der Dehnbarkeit und der Moduln einer Arterie in Längs- und Tangentialrichtung werden bisher zwei Methoden angewandt. Eine davon wurde bereits erwähnt und besteht darin, daß das Segment einer Arterie „frei“ durch Innendrucksteigerung gedehnt wird. Da die Spannungen in beiden Richtungen der Gefäßwand leicht errechnet werden können, ist man in der Lage, die Dehnbarkeiten bzw. Moduln zu bestimmen. Bei der zweiten Methode wird ein ausgeschnittener Streifen der Arterienwand zuerst in Längs- und dann in Tangentialrichtung allein gedehnt, so daß die Moduln sukzessive bestimmt werden.

Merkwürdigerweise wurde bisher nie daran gedacht, daß die Ergebnisse dieser beiden Methoden grundsätzlich nicht (oder nur in Sonderfällen) übereinstimmen können. Die Erklärung für diese Behauptung ergibt sich aus den hier beschriebenen Dehnungskurven. Gleichzeitig in zwei Richtungen stattfindende Dehnungen sind nie voneinander unabhängig. Ebenso wie in Abb. 13 gezeigt wurde, daß eine Längsvordehnung die Dehnbarkeit einer Arterie in Tangentialrichtung beeinflußt, beeinflussen sich die beiden Dehnungen auch bei der erstgenannten FRANKSchen Versuchsanordnung. Diese gegenseitige Beeinflussung fehlt bei der zweiten Methode der reinen Längs- und Tangentialdehnung am Arterienstreifen. Daher können die Resultate der beiden Methoden nicht übereinstimmen.

Die Lösung des Problems liegt darin, daß man die Dehnbarkeiten mit jeder der beiden Methoden gesondert bestimmen muß, oder aber, daß man durch zusätzliche Messung der äußeren Längskraft bei verschiedenen Vordehnungen eine Bestimmung der elastischen Größen (Moduln und Querkontraktionszahlen) bei gleichzeitiger Einwirkung beliebiger Spannungs- oder Kraftwerte in Längs- und Tangentialrichtung ermöglicht. Wesentlich ist, daß die beiden erwähnten Methoden lediglich zwei speziell · Sonderfälle aller möglichen Kombinationen von gleichzeitig in verschiedenen Richtungen bewirkten Dehnungen darstellen. Das Ziel der hier angewandten Methodik ist eine möglichst vollständige Erfassung sämtlicher Kombinationen.

Die Durchführung dieses Gedankens soll in den folgenden Abschnitten ausführlicher besprochen werden.

Über das Verhalten der Querkontraktionszahl μ'_{12} kann aus den Kurven der Abb. 12 ausgesagt werden, daß sie kleiner als 0,5 sein muß. In Abschnitt 15 wurde festgestellt, daß immer dann, wenn eine Längsdehnung bei konstanter Tangentialspannung eine Vergrößerung des Innenvolumens eines Schlauch- oder Arteriensegments bewirkt, μ'_{12} kleiner als 0,5 sein muß. Dies ist auch der Fall, wenn die Druck-Volumenkurven mit zunehmender Längsvordehnung gegen größere Volumina (im Diagramm nach rechts) verlagert werden. Dieses Verhalten zeigen die in Abb. 12 gezeigten Kurven.

Die Längskraft, die zur Dehnung der Arterie auf eine bestimmte Länge notwendig ist, nimmt mit steigendem Innendruck ab. Dieses in Abb. 11 gezeigte Verhalten ist dadurch zu erklären, daß der Innendruck der Arterie eine der äußeren Längskraft entgegengesetzte innere Längskraft erzeugt. Je höher diese wird, desto kleiner wird die registrierte äußere Kraft. Das gleiche gilt auch für die entsprechenden Spannungen. Die äußere Kraft K_{2a} ist, wie sich in Abschnitt

12 ergab, gleich der Differenz der gesamten in der Längsrichtung der Schlauchwand wirkenden Kraft $K_{2\text{ges}}$ und der vom Innendruck bewirkten inneren Längskraft K_2 .

$$[18,1] \quad K_{2a} = K_{2\text{ges}} - K_2$$

Wenn man also annimmt, daß die Gesamtkraft bei der Drucksteigerung in einer längsfixierten Arterie ungefähr konstant bleibt, nimmt die äußere registrierte Längskraft mit zunehmender Drucksteigerung ab.

19. Typische Druck-Volumenkurven

Inhalt: Aus theoretisch abgeleiteten Dehnungspotentialen mit charakteristischen Eigenschaften werden Druck-Volumenkurven berechnet. Vergleicht man damit die an Arterien gewonnenen, dann zeigt ein Modell ohne Querkontraktion in Längs- und Tangentialrichtung die beste Übereinstimmung.

Vom mathematischen Standpunkt ist die Aufstellung des Dehnungspotentials das Ziel einer Analyse von Dehnungskurven. Wenn das Dehnungspotential bekannt ist, können mit Hilfe der in Abschnitt 9 beschriebenen Methodik alle interessierenden Größen berechnet werden. Wenn man von experimentellen Messungen ausgeht, ist dieses Vorgehen allerdings äußerst kompliziert und praktisch nicht durchführbar. Man kann jedoch den umgekehrten Weg einschlagen und aus verschiedenen Dehnungspotentialen die Druck-Volumenkurven berechnen. So bietet sich die Möglichkeit, elastische Schlauchmodelle mit typischen Wandeigenschaften zu konstruieren, deren Druck-Volumenkurven mit den an realen Schläuchen und Arterien gemessenen verglichen werden können. Daraus erhält man auf einfachem Wege eine Aussage über deren Eigenschaften. Das Vorgehen bei diesen Berechnungen erfolgt nach den in Abschnitt 9 festgelegten Richtlinien.

Als erstes Beispiel sei das Dehnungspotential (pro Volumeneinheit)

$$[19,1] \quad W = \frac{1}{2b} (\lambda_1^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 2)$$

untersucht, das ein Material beschreibt, dessen Dehnbarkeit in Richtung 1 unabhängig von jener in Richtung 2 ist. b ist eine Materialkonstante. Man kann Gl. [19,1] konstruieren, indem man fordert, daß die Kraft K_1 allein von λ_1 und die Kraft K_2 allein von λ_2 abhängt. Bei der Berechnung muß die Bedingung beachtet werden, daß im ungedehnten Zustand ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) erstens das Potential und zweitens auch die Kräfte Null sein müssen. Als wesentlichste Eigenschaft dieses Modells ist das Verhalten der Querkontraktionszahlen zu nennen, deren jeder ($\mu_{12}, \mu_{21}, \mu'_{12}, \mu'_{21}$) Null ist. Dieses Verhalten stimmt mit der Forderung überein, daß die Dehnungen in den beiden Richtungen 1 und 2 voneinander unabhängig sind. Jedoch die Wanddicke h , d. h. die Länge in Richtung 3, muß sich in der Weise ändern, daß die Volumenkonstanz des Wandmaterials gewahrt bleibt. Man kann sich leicht vorstellen, daß eine Dehnung z. B. in Richtung 1 zwar die Länge in Richtung 2 nicht beeinflusst, aber infolge der Volumenkonstanz die Länge in Richtung 3 um so stärker verkleinert. Demnach haben die Querkontraktionszahlen mit den Indices 31 und 32 den konstanten Wert Eins.

Auf die Berechnung der Druck-Volumenkurven aus dem gegebenen Potential W braucht hier nicht näher eingegangen werden. In den folgenden Abbildungen sind jeweils die „freie“ Druck-Volumenkurve strichliert, die für verschiedene Längsvordrehungen berechneten, ausgezogen gezeichnet. Strichpunktisiert ist das Verhalten der äußeren Spannung (σ_{2a}) während der je zwei in Längsfixation ($\lambda_2 = 1,2$ und $\lambda_2 = 1,4$) durchgeführten Dehnungen. Sowohl Druck als Spannung sind in willkürlichen Einheiten gezeichnet; die jeweilige Einheit hängt von der Größe der in jeder Potentialgleichung enthaltenen Materialkonstante ab, die für die allgemeine Charakterisierung der Kurvenform keine Rolle spielt.

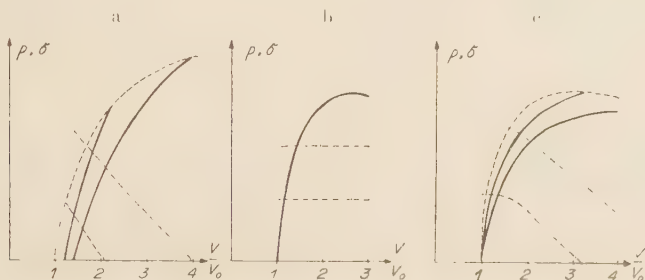


Abb. 14. a. Berechnete Druckvolumenkurven nach dem Dehnungspotential der Gl. [19,1]. Wie bei den folgenden Abbildungen bedeutet die Ordinate den Druck bzw. die äußere Längsspannung σ_{2a} . Die Einheiten der Ordinate sind willkürlich gewählt, da sie von den Materialkonstanten und den Maßen des Schlauchs abhängen, die grundsätzlich für die Gestalt der Kurven keine Bedeutung haben. Abszisse: relatives Volumen V/V_0 . Es sind jeweils die „freie“ (strichliert) und zwei „längsfixierte“ Druckvolumenkurven (ausgezogen) gezeichnet. Strichpunktisiert ist das Verhalten der äußeren Längsspannung während der beiden nach Längsvordrehung bestimmten Dehnungen gezeigt. b. Druckvolumenkurven nach dem Dehnungspotential Gl. [19,2]. c. Druckvolumenkurven nach dem Dehnungspotential Gl. [19,3].

Die Druckvolumenkurven eines Schlauchs, für dessen Wandmaterial das Dehnungspotential [19,1] zutrifft, sind in Abb. 14a gezeigt. Die wesentlichen Eigenschaften dieses Modells sind:

1. Längsdehnung durch eine außen angreifende Kraft vergrößert bei Innendruck Null das Innenvolumen des Schlauchs. Auch bei höheren Drucken wird das Innenvolumen durch Längsdehnung vergrößert.
2. Bei Druckerhöhung im längsfixierten Zustand nimmt die äußere Längsspannung σ_{2a} linear mit steigendem Druck ab.

Im zweiten Beispiel sei das Dehnungspotential für ein anderes Modell dargestellt:

$$[19,2] \quad W = -\frac{2}{3\alpha} \left((\ln \lambda_1)^2 + (\ln \lambda_2)^2 + (\ln \lambda_1 \ln \lambda_2) \right)$$

Diese Gleichung wurde in Abschnitt 9, Gl. [9,24] bis [9,26] abgeleitet; sie beschreibt ein Modell mit konstantem und in allen Richtungen gleich großen Modul $E = 1/\alpha$. Die beiden Querkontraktionszahlen μ'_{12} und μ'_{21} haben unabhängig vom Dehnungszustand immer den Wert 0,5. Es besteht also eine starke Abhängigkeit der Dehnungen in Richtung 1 und Richtung 2 voneinander.

Die Druck-Volumenkurve dieses Modells ist in Abb. 14b gezeigt. Charakteristisch hieran ist:

1. Die Dehnungskurve ist völlig unabhängig von der Längsvordehnung. Zwischen „freier“ und „längsfixierter“ Druck-Volumenkurve besteht kein Unterschied. Bei konstantem Innendruck bewirkt demnach eine Längsdehnung niemals eine Vergrößerung des Innenvolumens.
2. Die äußere Längsspannung bleibt bei Innendrucksteigerung konstant. Dies hängt damit zusammen, daß auch bei „freier“ Schlauchdehnung keine Längszunahme an dem Schlauch auftritt. Bei Dehnung des Schlauchs durch Innendrucksteigerung bleiben daher sowohl die vorgegebene Länge als auch die äußere Längsspannung unverändert.

Als drittes Modell sei ein Schlauch untersucht, dessen Wandmaterial durch das bereits in Gl. [14,2] angeschriebene Potential

$$[19,3] \quad W = \frac{1}{2} G \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 3 \right)$$

beschrieben wird. Wie erwähnt, wurde dieses Potential auf Grund einer Elastomertheorie aufgestellt und beschreibt relativ genau das Verhalten von Gummi (FRELOAR 1958). Die Anwendung dieser Gleichung zur Berechnung der Arterienelastizität wurde zuerst von LEWI u. SCHAPER (1964) vorgeschlagen. Die berechneten Druck-Volumenkurven sind in Abb. 14c gezeigt und ergeben folgende Charakteristika:

1. Bei Innendruck Null tritt durch Längsdrehung keine Volumänderung im Schlauch auf, während bei höheren Drucken beträchtliche Volumenänderungen zu beobachten sind. Die Berechnung der Querkontraktionszahlen ergibt, daß diese im ungedehnten Zustand 0.5 betragen, bei zunehmendem Innendruck jedoch kleiner werden (vgl. Abschnitt 15).
2. Die äußere Längsspannung nimmt mit steigendem Innendruck zunächst wenig ab, und fällt bei weiterer Dehnung annähernd linear mit steigendem Druck.

Das zuletzt erwähnte Modell verhält sich also bei niederem Innendruck wie das in Abb. 14b (mit $\mu'_{ik} = 0.5$) gezeigte, bei höherem Innendruck annähernd immer mehr wie das in Abb. 14a (mit $\mu'_{ik} = 0$) dargestellte. Die Übereinstimmung des Modells Abb. 14c mit einem Gummischlauch ergibt sich aus dem Vergleich mit Abb. 8. Allerdings wurde in dem dort gezeigten Versuch nur ein relativ kleiner Abschnitt der Dehnungskurve untersucht. Als wesentliches Merkmal ist die fehlende Volumänderung bei reiner Längsdehnung und die stete Vergrößerung der durch Längsdehnung bewirkten Volumenzunahme bei steigendem Innendruck deutlich zu erkennen.

Die in Abb. 11 und 12 wiedergegebenen Druckvolumenkurven von Arterien sind qualitativ am ehesten mit dem ersten Modell in Abb. 14a vergleichbar; vor allem darin, daß die Dehnungen in den beiden Hauptrichtungen (1 und 2) bei niederem Innendruck nahezu unabhängig voneinander sind, daß also die Querkontraktionszahlen bei geringen Dehnungen Null oder wenigstens sehr klein sind.

Zur besseren Übersicht sind in Abb. 15 sechs in einem Dehnungszyklus an einer Rindercarotis gewonnenen Druckvolumenkurven zusammengefaßt. Man erkennt die Zunahme der äußeren Längskraft bei reiner Längsdehnung (strichpunktiert, bei Innendruck Null) und die beträchtliche Vergrößerung des Innen-

volumens bei diesem Vorgang. Bei Erhöhung des Innendrucks durch Einpumpen von Flüssigkeit in die Arterie sinkt die äußere Längskraft ab und wird jeweils bei dem gleichen Volumenwert Null, bei dem die zugehörige „längsfixierte“ Kurven in die „freie“ übergeht. Die Druckvolumenkurven verlaufen im Anfangsteil umso flacher, je stärker die Vordehnung in Längsrichtung ist. Der Unterschied zwischen der „freien“ Dehnung am Anfang des Zyklus (Kurve 1) und am Ende des Zyklus (Kurve 5) weist auf eine noch vorhandene geringe Nachdehnung hin.

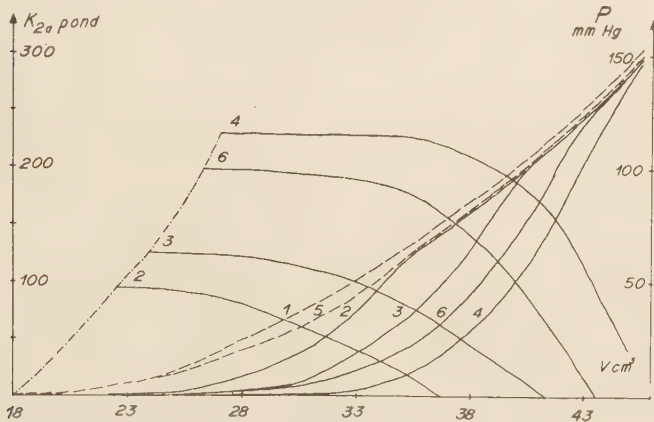


Abb. 15. Druckvolumenkurven einer Rindercarotis; Ausgangslänge $l_0 = 24$ cm. Strichliert: „freie“ Dehnung; ausgezogen: „längsfixierte“ Dehnungen. Strichpunktirt: Beziehung zwischen Volumen und äußerer Längskraft bei reiner Längsdehnung. Von dieser Kurve ausgehend ist das Verhalten der äußeren Längskraft bei Dehnungsversuchen in vier verschiedenen fixierten Längen gezeigt. Die Ziffern bedeuten die Reihenfolge der Dehnungen: 1. „frei“, 2. 30 cm, 3. 32 cm, 4. 36 cm, 5. „frei“, 6. 34,5 cm. Nähere Beschreibung im Text.

Wenn man davon absieht, daß die Steilheit der Druckvolumenkurven mit zunehmendem Druck bei den Arterien zunimmt, ist im niederen Druckbereich eine Übereinstimmung von Abb. 14a und 15 zu erkennen. Wie noch gezeigt wird, kann diese Übereinstimmung bei geringer Wanddehnung auch durch die experimentelle Bestimmung der Querkontraktionszahlen bestätigt werden (vgl. auch Abschnitt 16), während bei starken Dehnungen beträchtliche Abweichungen gefunden wurden.

20. Die Bestimmung der Frankschen Elastizitätsmoduln

Inhalt: Die Elastizitätsmoduln des FRANKSchen spannungsbezogenen Systems werden modellmäßig aus einem gegebenen Potential und aus gemessenen Druck-Volumenkurven einer Arterie bestimmt. Da die Moduln von den bestehenden Dehnungen in Längs- und Tangentialrichtung abhängen, müssen sie in Tabellenform dargestellt werden.

Die Elastizitätsmoduln können nicht unmittelbar aus dem Druck-Volumendiagramm eines Schlauchs oder einer Arterie abgelesen werden. Wenn alle Maße des Schlauchs bekannt sind, können mit Hilfe der in Abschnitt 17 zusammengefaßten Gleichungen aus dem Diagramm Spannungen und Elongationen berechnet werden. Eine zur Bestimmung der Moduln brauchbare Darstellung

ist die in den folgenden Abbildungen angewandte. Die relativen Längen λ_1 und λ_2 werden als Funktion der gesamten Längsspannung $\sigma_{2\text{ ges}}$ aufgetragen. Als Parameter dient die jeweils konstante Tangentialspannung. In den Abb. 16

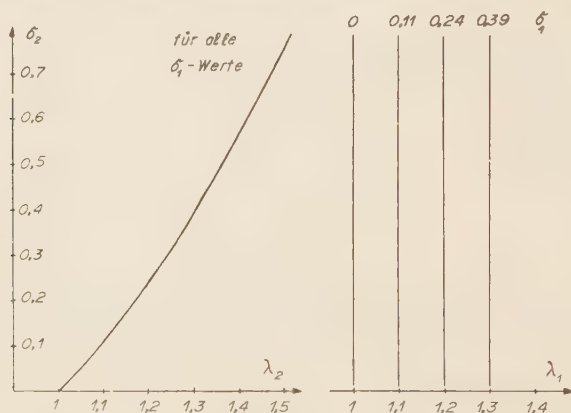


Abb. 16. Beziehung zwischen der gesamten Längsspannung $\sigma_2 = \sigma_{2\text{ ges}}$, der relativen Länge λ_2 (links) und des relativen Umfangs eines Schlauches λ_1 (rechts) nach Gl. [19,1]. Parameterbeschriftung: Spannung in Tangentialrichtung σ_1 (in willkürlichen Einheiten; vgl. Abb. 14a).

bis 18 sind diese Diagramme zunächst für die im vorigen Abschnitt besprochenen Modelle gezeigt. Als Spannungseinheit sind in den Diagrammen willkürlich gewählte Zahlenwerte angegeben, da hier auf die von den jeweiligen Materialkonstanten abhängigen Absolutwerte nicht eingegangen werden soll (vgl. Abschnitt 19).

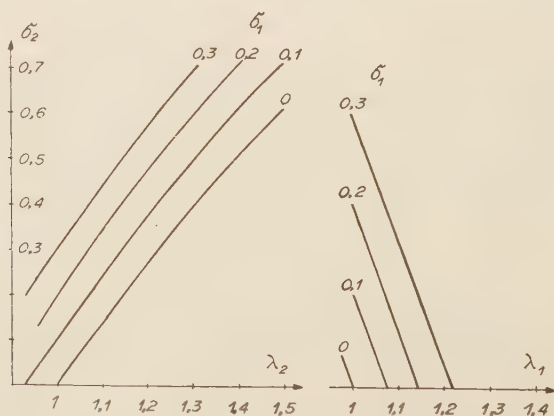


Abb. 17. Längsspannungsdiagramm nach Gl. [19,2]. Bezeichnungen wie in Abb. 16.

Für das Modell Gl. [19,1] ist, wie in Abb. 16 zu erkennen ist, die Längsspannung unabhängig von den Dehnungen in Tangentialrichtung und umgekehrt.

Der Schlauchumfang (relativer Wert λ_1) ist bei konstanter Tangentialspannung unabhängig von der Längsspannung konstant. Dieses Verhalten ist auf Grund der bei der Berechnung des Potentials Gl. [19.1] gemachten Voraussetzungen verständlich.

Für das zweite Modell Gl. [19.2] ergibt sich das in Abb. 17 dargestellte Bild. Dieses Modell hat wie erwähnt einen konstanten spannungsbezogenen Modul, der in allen Richtungen den gleichen Wert hat. Auch die Querkontraktionszahlen sind konstant und haben den Wert 0.5. Es zeigt sich daher eine starke Abhängigkeit der Längen λ_1 und λ_2 von den jeweils in senkrechter Richtung

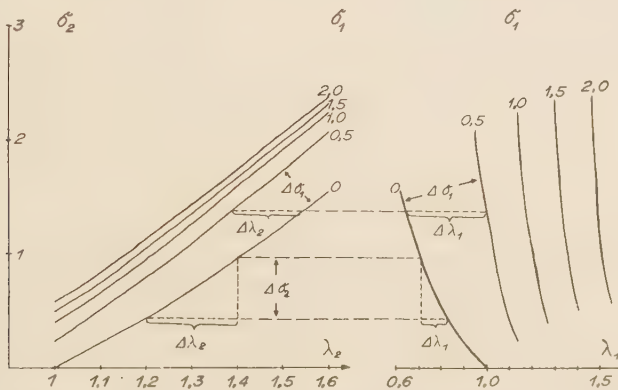


Abb. 18. Längenspannungsdiagramm nach Gl. [19.3]. Bezeichnungen wie in Abb. 16. An Hand dieser Abbildung wird im Text die Bestimmung der Moduln und Querkontraktionszahlen des FRANKSchen spannungsbezogenen Systems dargelegt. Aus diesem Grund ist die Abszisse λ_1 im Maßstab gegenüber den Abb. 16 und 17 vergrößert gezeichnet.

wirkenden Spannungen. Im linken Teil des Diagramms erkennt man die hierdurch verursachte Verschiebung des Längen-Längsspannungsdiagramms mit steigender Tangentialspannung. Im rechten Teil der Abb. 17 ist zu sehen, daß der Schlauchumfang bei konstanter Tangentialspannung mit steigender Längsspannung infolge der starken Querkontraktion verkleinert wird.

Analoges gilt für das Elastomerenmodell Gl. [19.3], dessen Diagramme in Abb. 18 gezeigt sind. Wie nach der Schilderung in Abschnitt 19 zu erwarten ist, nimmt bei diesem Modell die gegenseitige Abhängigkeit der Dehnungen in den beiden Richtungen mit zunehmender Dehnung ab.

An diesem Diagramm soll nun das Vorgehen zur Messung der FRANKSchen spannungsbezogenen Moduln und Querkontraktionszahlen gezeigt werden. Da die aus dem Diagramm ablesbaren Spannungs- und Längendifferenzen nicht „unendlich klein“ sind, soll bei den folgenden Definitionsgleichungen der FRANKSchen Moduln anstelle des Differentialsymbols das Differenzsymbol Δ geschrieben werden.

Aus dem rechten Diagramm können die Moduln in Tangentialrichtungen abgelesen werden. Diese sind unter der Bedingung $\sigma_2 = \text{const}$ zu bestimmen. Die Spannungsdifferenz $\Delta\sigma_1$ ist aus der Parameterbeschriftung, die (relative) Längendifferenz $\Delta\lambda_1$ aus der Abszissenbeschriftung abzulesen. Man erhält

$$[20.1] \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\lambda_1} \lambda_1$$

Analog ergibt sich aus dem linken Diagramm unter der Voraussetzung $\sigma_1 = \text{const}$ der Modul in Längsrichtung

$$[20.2] \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\Delta\sigma_2}{\Delta\lambda_2} \lambda_2$$

$\Delta\sigma_2$ ist an der Ordinate, $\Delta\lambda_2$ an der Abszisse abzulesen.

Etwas umständlicher ist die Messung der Querkontraktionszahlen zu erklären. Die horizontale strichlierte Linie im oberen Teil der Abb. 18 bedeutet $\sigma_2 = \text{const}$. Die an den beiden Enden dieser Linie angefügten Klammern umfassen im rechten wie im linken Diagramm die gleiche Spannungsdifferenz $\Delta\sigma_1$ und grenzen links $\Delta\lambda_2$, rechts $\Delta\lambda_1$ ab. Diese Größen sind die Gleichung

$$[20.3] \quad \mu'_{21} = - \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_1}$$

einzusetzen.

Die Querkontraktionszahl μ'_{12} ist bei konstantem σ_1 zu bestimmen, wobei sowohl $\Delta\lambda_1$ als auch $\Delta\lambda_2$ der gleichen Spannungsdifferenz $\Delta\sigma_2$ in rechten und im linken Diagramm entsprechen muß. Diese Spannungsdifferenz ist an der Ordinate abzulesen und in Abb. 18 durch die zwei unteren strichlierten Horizontalen abgegrenzt. σ_1 ist entlang der Kurven konstant. Die Längendifferenzen sind demnach aus den durch Klammern abgegrenzten Enden der untersten strichlierten Horizontalen abzulesen. Man erhält daraus

$$[20.4] \quad \mu'_{12} = - \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\Delta\lambda_2}$$

Man ersieht ohne weiteres aus den Abbildungen, daß man in jeder Richtung für jede beliebige Kombination (λ_1, λ_2) bzw. (σ_1, σ_2) je einen Modul und eine Querkontraktionszahl, insgesamt also 4 Werte erhält.

Für das als Beispiel gewählte Elastomerenmodell der Abb. 18 ist es einfacher, alle diese Werte aus dem gegebenen Dehnungspotential zu berechnen. Man erhält durch Einsetzen von Gl. [19,3] in die Gleichungen der spannungsbezogenen FRANKSchen Moduln (Gl. [9,16] und [9,17]):

$$[20.5] \quad \epsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 2G \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^4 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^4}$$

und

$$[20.6] \quad \mu'_{21} = - \frac{1}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^4}$$

ϵ_2 und μ'_{12} folgen aus diesen Gleichungen durch Vertauschen der Indices. Da nur relative Werte des Moduls untersucht werden sollen, wird $G = 1/3$ gesetzt. Die Moduln haben daher im ungedehnten Zustand den Wert 1. Auf die Werte der Querkontraktionszahlen hat diese Normierung keinen Einfluß. Die berechneten Moduln können beispielsweise in der folgenden Tabellenform in Abhängigkeit von den relativen Längen angeschrieben werden.

Tabelle 4

λ_2	λ_1				λ_2	λ_1			
	1,00	1,25	1,50			1,00	1,25	1,50	
1,00	1,00	1,30	1,71	ϵ_1/ϵ_{10}	1,00	1,00	0,97	0,91	ϵ_2/ϵ_{20}
1,25	0,97	1,25	1,66		1,25	1,30	1,25	1,21	
1,50	0,91	1,21	1,67		1,50	1,71	1,66	1,67	
λ_2	λ_1				λ_2	λ_1			
	1,00	1,25	1,50			1,00	1,25	1,50	
1,00	0,50	0,29	0,16	μ'_{12}	1,00	0,5	0,39	0,31	μ'_{21}
1,25	0,39	0,21	0,11		1,25	0,29	0,21	0,15	
1,50	0,31	0,15	0,08		1,50	0,16	0,11	0,08	

Die Moduln nehmen in der jeweiligen Dehnungsrichtung zu, in der dazu senkrechten Richtung ab. Daß alle Querkontraktionszahlen mit zunehmender Dehnung kleiner werden, wurde bereits in Abschnitt 15 erwähnt und für ein

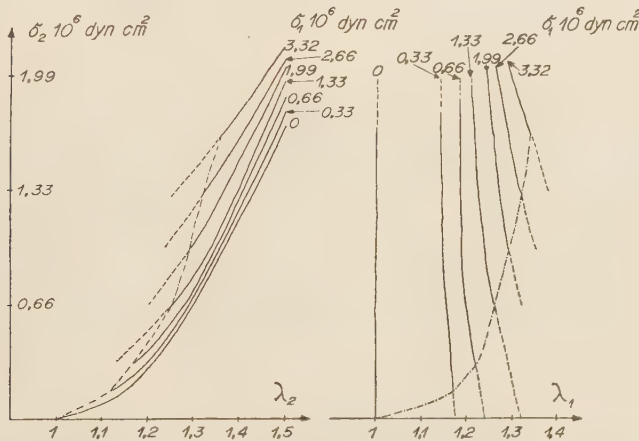


Abb. 19. Längenspannungsdiagramm nach den experimentell an einer Rindercarotis gemessenen Werten (vgl. Abb. 15). Man erkennt, daß im niederen Spannungsbereich eine Ähnlichkeit mit dem Modell der Abb. 16 besteht. Die strichpunktierten Kurven geben den „freien“ Dehnungsverlauf wieder und können durch die Bedingung $\sigma_3 = \sigma_1/2$ leicht aufgefunden werden. Wie ohne weiteres ersichtlich ist, können die extrapolierten (strichlierten) Fortsetzungen der experimentell gewonnenen Kurven an Arteriensegmenten grundsätzlich nicht beobachtet werden, da sie „jenseits“ der „freien“ Dehnungskurve liegen. Mittels der an Hand der Abb. 18 demonstrierten Methode können aus dieser Abb. die Moduln und Querkontraktionszahlen der Arterie bestimmt werden (vgl. auch Abschnitt 21).

spezielles Beispiel berechnet. Da das berechnete Material ebenso wie Gummi im ungedehnten Zustand isotrop ist und keine „bevorzugte“ Richtung enthält, ist verständlich, daß die Modultabellen symmetrisch sind, daß man also die beiden Dehnungsrichtungen vertauschen kann. Mathematisch ist dies daran zu erkennen, daß man wie oben erwähnt, die Indices vertauschen darf. In Tab. 4 erkennt man leicht, daß die beiden rechts stehenden Modultabellen aus den linksstehenden durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entstehen.

So einfache Verhältnisse sind an Arterien nicht zu erwarten, da dort schon im ungedehnten Zustand eine strukturbedingte Anisotropie bestehen muß.

Abb. 19 zeigt das analog zu den vorhergehenden Abbildungen konstruierte Diagramm, das aus den in Abschnitt 18 besprochenen Versuchen für eine Rindercarotis berechnet wurde. Aus diesem Diagramm wurden die Elastizitätsmoduln bestimmt, die in der folgenden Tabelle zusammengefaßt sind.

Tabelle 5

λ_1					λ_1				
λ_2	1,0	1,1	1,2	1,3	λ_2	1,0	1,1	1,2	1,3
1,00	/	1,6	8,0	20,0	1,00	/	0,8	0,8	/
1,25	/	1,6	8,0	20,0	1,25	/	5,5	5,5	6,0
1,50	/	1,8	21,0	27,0	1,50	/	8,7	8,7	6,7
$\epsilon_1 [10^8 \text{ dyn/cm}^2]$					$\epsilon_2 [10^8 \text{ dyn/cm}^2]$				
λ_1					λ_1				
λ_2	1,0	1,1	1,2	1,3	λ_2	1,0	1,1	1,2	1,3
1,00	/	0,0	0,0	0,0	1,00	/	0,0	0,0	0,0
1,25	/	0,0	0,15	0,25	1,25	/	0,05	0,2	1,0
1,50	/	0,15	0,22	0,36	1,50	/	0,05	0,2	0,7
μ'_{12}					μ'_{21}				

Die Moduln wachsen jeweils in der Dehnungsrichtung an. Bei Dehnung in der senkrechten Richtung steigen die Modulwerte nur geringfügig oder überhaupt nicht an. Die Moduln in Längsrichtung sind im allgemeinen um mehr als die Hälfte kleiner als in Tangentialrichtung. Die Querkontraktionszahlen sind bei geringen Dehnungen praktisch Null und vergrößern sich mit zunehmender Dehnung. Arterien zeigen also in dieser Hinsicht gerade das gegenteilige Verhalten wie Gummi. Der interessanteste Befund ist jedoch, daß die Querkontraktionszahl μ'_{21} bei großen Dehnungen über 0,5 ansteigen kann. Dieser Befund, der offensichtlich mit der Struktur der Arterienwand zusammenhängt, soll in den folgenden Abschnitten ausführlicher untersucht werden.

21. Die Struktur der Arterienwand

Inhalt: Die Grundstruktur der Arterienwand besteht aus sich überkreuzenden, spiralig verlaufenden Faserzügen. Mit Hilfe eines einfach berechenbaren Schlauchwandmodells wird gezeigt, daß diese Struktur die elastischen Eigenschaften der Arterien wesentlich mitbestimmen.

Die Arterienwand besteht aus elastischen, kollagenen und muskulären Fasern, die im ungedehnten Zustand geschlängelt verlaufen und mit zunehmender Dehnung sukzessive angespannt werden (WAGNER u. KAPAL 1951, 1952, WEZLER u. SCHLÜTER 1953, WEZLER u. SINN 1953, BURTON 1954, BADER 1963, WOLINSKY u. GLAGOV 1964). Die am wenigsten dehnbaren kollagenen Fasern werden erst bei höheren Innendruck gestreckt und verhindern das Aufblähen der Arterien.

In den Abschnitten 16 und 19 wurde der an Rindercarotiden erhobene Befund dargestellt, daß die Querkontraktionszahlen der Arterienwand bei geringer Dehnung sehr kleine Werte haben und mit zunehmender Dehnung anwachsen, wobei für μ'_{21} sogar Werte von mehr als 0,5 beobachtet wurden.

Kleine Werte der Querkontraktionszahlen μ'_{12} und μ'_{21} bedeuten, daß die Dehnungen in den beiden Hauptrichtungen (1 und 2) des Arterienrohres nahezu unabhängig voneinander sind. Auf Grund der eingangs erwähnten Vorstellung, daß im ungedehnten Zustand der Arterienwand alle Fasern nicht nur entspannt sind, sondern sogar geschlängelt verlaufen, ist ohne weiteres verständlich, daß unter dieser Bedingung keine merkliche Wechselwirkung zwischen den Dehnungen in Längs- und Tangentialrichtung stattfinden kann.

Wenn bei zunehmender Dehnung alle Fasern und zuletzt die nahezu undehnbaren kollagenen Fasern straff angespannt werden, ist auch eine Zunahme der erwähnten gegenseitigen Abhängigkeit der Dehnungen und damit auch der Querkontraktionszahlen zu erwarten. Diese Behauptung soll im folgenden ausführlich untersucht und erläutert werden.

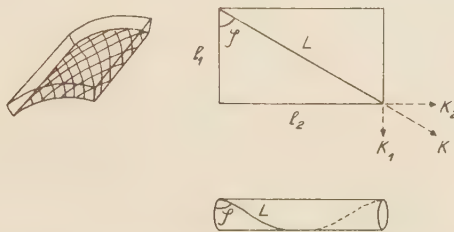


Abb. 20. Links: Schema eines Schlauchwandsegments mit spiralförmiger Struktur. Rechts: im unteren Teil ist der Verlauf einer einzelnen Strukturfasers des Modells in der Schlauchwand gezeigt, die oben aufgeschnitten und aufgerollt dargestellt ist. Die Faserichtung entspricht immer der Diagonalen des Kräfteparallelogramms von Längs- (K_2) und Tangentialkraft (K_1). Näheres im Text.

Die Wand der großen herznahen Arterien besteht aus mehreren Schichten elastischer Membranen, die von spiralförmig verlaufenden muskulären und kollagenen Fasern durchflochten sind und ihrerseits eine spiralförmige Feinstruktur besitzen (DOERR 1963). Der Steigungswinkel der Spiralfasern nimmt in der Wand von innen nach außen von etwa 20° auf 50° zu (BENNINGHOFF 1930, DOERR 1963).

Es liegt nahe, mit Hilfe der hier entwickelten Theorie die elastischen Eigenschaften eines Schlauchs zu untersuchen, dessen Wandstruktur aus spiralförmig verlaufenden Fasern besteht. Es sei angenommen, daß jeweils die Hälfte aller Fasern den gleichen Steigungswinkel φ haben, während der Steigungswinkel der aus einem Netz sich überkreuzender Fasern. Die Fasern seien in eine homogene inkompressible „Grundsubstanz“ eingebettet, die allen Dehnungen des Schlauchs widerstandslos folgt. Ein Wandsegment dieses Modells ist in Abb. 20 dargestellt.

Zur mathematischen Analyse dieses Modells genügt es, nur die in einer Richtung parallel verlaufenden Fasern mit positivem Steigungswinkel zu untersuchen. Wie im rechten Teil der Abb. 20 gezeigt, ist l_2 diejenige Länge eines Schlauchsegments, innerhalb derer eine Faser den Schlauch einmal vollständig umrundet. l_1 ist der Schlauchumfang und L die Länge der Diagonalen des erwähnten Segments. In dieser Richtung verlaufen auch die Fasern. Aus Abb. 20 geht hervor, daß die Faserichtung immer auch mit der Richtung der Diagonalen des Kräfteparallelogramms von Tangentialkraft K_1 und Längskraft K_2 übereinstimmt. Die Kraft-Längenbeziehung der Fasern gelte für die Dehnbarkeit des gesamten

oben definierten und in Abb. 20 rechts gezeigten Segments bei Dehnung durch die Kraft K in Diagonalrichtung:

$$[21,1] \quad L = L(K)$$

Das Wandvolumen des Schlauchsegments ist auf Grund der oben beschriebenen Annahme konstant

$$[21,2] \quad V_W = l_1 l_2 h = \text{const}$$

wobei die Wanddicke h sehr klein im Vergleich zum Schlauchradius angenommen ist.

Zur Berechnung der Moduln ist es notwendig, Spannungen pro Einheit des Wandquerschnitts zu berechnen, obwohl die Kräfte nur von der Faserschicht, nicht aber von der „Grundsubstanz“ getragen werden. Dieses an dem Modell etwas abwegig anmutende Vorgehen weicht allerdings gar nicht von der üblichen Modulbestimmung an Arterien ab, die ja einen grundsätzlich ähnlichen Wandaufbau haben. Die Berechnungsweise ist aber deswegen korrekt, weil nicht nach den Moduln der Strukturfasern, sondern nach jenen der gesamten Schlauch- bzw. Arterienwand gefragt ist.

Es zeigt sich hierbei, daß die Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen der Arterienwand wie auch des Modells im wesentlichen strukturabhängige Größen sind. Auf diese einfache und doch sehr wichtige Tatsache ist bisher kaum geachtet worden. Anderenfalls wäre es nicht erklärlich, daß bis in die letzte Zeit an der Meinung festgehalten wurde, daß die Größe der Querkontraktionszahl der Arterienwand allein auf Grund der Inkompressibilität des Wandmaterials bestimmt werden könne (BERGEL 1961, FRANK 1906, 1920, LAWTON 1954, McDONALD 1960, MÜLLER 1928, SCHÖNENBERGER u. MÜLLER 1960, 1961).

Wie aus Abb. 20 zu erkennen ist, lauten die Grundgleichungen dieses Schlauchwandmodells

$$[21,3] \quad \begin{aligned} l_1 &= L \cos \varphi & K_1 &= K \cos \varphi \\ l_2 &= L \sin \varphi & K_2 &= K \sin \varphi \\ L &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2} & K &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \end{aligned}$$

Zwischen den Wandquerschnitten in Längs- und Tangentialrichtung und dem Wandvolumen V_W bestehen die Beziehungen

$$[21,4] \quad q_1 = \frac{V_W}{l_1} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{V_W}{l_2}$$

Da sich die folgenden Berechnungen vor allem auf die Untersuchung von Kräften und Längen beziehen, ist es vorteilhaft und auch einfacher, die kraftbezogenen FRANKSchen Moduln heranzuziehen (vgl. Abschnitt 12). Der Zusammenhang zwischen den Gesamtkräften, den „LAPLACE-Spannungen“ und den effektiven Spannungen ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$[21,5] \quad \begin{aligned} K_1 &= T_1 L \sin \varphi = h L \sigma_1 \sin \varphi \\ K_2 &= T_2 L \cos \varphi = h L \sigma_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Aus diesen Gl. ([21,3] bis [21,5]) und Gl. [21,1] kann man an Hand der in Abschnitt 9 dargestellten Regeln die folgenden Moduln des kraftbezogenen FRANKSchen Systems für das Modell berechnen,

$$[21,6] \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{E_1} = \frac{V_W}{KL} \left(\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK} \right) \\ a_2 &= \frac{1}{E_2} = \frac{V_W}{KL} \left(\cotg^2 \varphi + \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK} \right) \end{aligned}$$

Die Querkontraktionszahlen ergeben sich zu

$$[21,7] \quad \mu_{12} = \frac{1 - \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK}}{\cot^2 \varphi + \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK}}$$

$$\mu_{21} = \frac{1 - \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK}}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK}}$$

und sind, wie leicht zu erkennen ist, von der Wanddicke, d. h. der Schichtdicke der „Grundsubstanz“ unabhängig. Aus Gl. [21,3] und [21,5] ergibt sich ferner die wichtigste Beziehung

$$[21,8] \quad \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

Diese Gleichung gilt unabhängig davon, ob die Fasern der Wandstruktur sehr gering oder gar nicht dehnbar sind.

Im folgenden soll zunächst der einfachste und daher auch übersichtlichste Fall untersucht werden, daß die Strukturfasern nicht dehnbar sind. Anstelle der Gl. [21,1] tritt daher

$$[21,9] \quad L = \text{const,} \quad \text{soda\ss} \quad \frac{K}{L} \cdot \frac{dL}{dK} = 0$$

Unter dieser Voraussetzung müßte das Modell auf Grund der eingangs erwähnten Überlegungen ein ähnliches Verhalten zeigen, wie eine durch hohen Innendruck stark gedehnte Arterie.

Die elastische Dehnbarkeit des Modells, dessen Fasernetz selbst überhaupt nicht dehnbar ist, wird dadurch gewährleistet, daß die Richtung der Fasern immer in der Diagonalen des Kräfteparallelogramms von Längs- und Tangentialkraft verlaufen muß. Einer Änderung des Winkels φ wirken die beiden senkrecht zueinander stehenden Kräfte entgegen, so daß sich hier makroskopisch ein „quasielastisches“ Verhalten ergibt, das dem submikroskopischen, durch Anziehungskräfte zwischen den Atomen bedingten Verhalten homogener elastischer Stoffe entspricht. Die Elastizität des Modells kann man auch mit der Lageeinstellung einer Magnetnadel im magnetischen Kraftfeld vergleichen. Während die auf die Nadel wirkenden Kräfte magnetischer Natur sind, werden die auf die Fasern des Modells wirkenden Kräfte einerseits durch den Innendruck und andererseits durch etwaige äußere Längskräfte bewirkt. Jede Veränderung des Kräfteverhältnisses führt daher zu einer Veränderung des Steigungswinkels φ . Beispielsweise bewirkt bei Konstanzhaltung der Längskraft ein kleiner Zuwachs der Tangentialkraft eine Umfangsvergrößerung des Schlauchsegments, also eine Dehnung in tangentialer Richtung. Damit sind jedoch alle Voraussetzungen für die Durchführung einer Modulbestimmung erfüllt.

Das Verhalten der Querkontraktionszahlen sei an Hand der Abb. 20 demonstriert. Dehnt man das Segment in Richtung 2, dann vergrößert sich der Winkel φ , wodurch eine Kontraktion in Richtung 1 eintritt. Die Länge L bleibt voraussetzungsgemäß konstant. Je größer der Winkel vor der Dehnung ist, desto

größer ist die Kontraktion in Richtung 1 im Verhältnis zur Verlängerung in Richtung 2. Wenn φ vor der Dehnung klein ist, dann kehren sich die Verhältnisse um. Aus dieser Überlegung folgt, daß die beiden Querkontraktionszahlen μ_{12} und μ_{21} je nach der Größe des Winkels φ beliebige positive Werte annehmen können. Dieses Ergebnis kann aus den Gl. [21,7] leicht bestätigt werden, wenn man Gl. [21,9] berücksichtigt.

In Abschnitt 4 wurde gezeigt, daß unter Voraussetzung von Inkompressibilität des Wandmaterials die Summe von zwei Querkontraktionszahlen mit gleichem Spaltenindex (2. Index) Eins sein muß. Da sowohl μ_{12} als auch μ_{21} größer als Eins sein können, folgt daher, daß μ_{32} und μ_{31} negative Werte annehmen können.

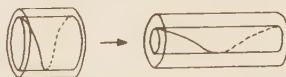


Abb. 21. Schematische Darstellung der „negativen“ Querkontraktion (oder „Querdilatation“). Bei Dehnung des Modellschlauchs in Längsrichtung wird die Wanddicke h größer, da die Faserlänge L konstant bleibt.

Die anschauliche Deutung dieses Befundes ist in Abb. 21 schematisch dargestellt. Bei bestimmten Dehnungen in Längs- oder Tangentialrichtung kann es infolge der Volumenkonstanz der „Grundsubstanz“ zu einer passiven Verdickung der Wandschicht kommen, also zu einer „Querdilatation“ bzw. einer „negativen Querkontraktion“. Damit ist bewiesen, daß entgegen der geläufigen Anschauung die Querkontraktionszahlen auch bei Volumenkonstanz und Inkompressibilität des Materials grundsätzlich jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen können. Größe und Vorzeichen hängen einerseits von momentaner Dehnbarkeit der Strukturfasern ab.

Im Gleichgewichtszustand der „freien“ Dehnung, worunter die Bedingung $\sigma_2 = \sigma_1/2$ zu verstehen ist, erhält man aus den Gl. [21,7] und [21,8] mit der Voraussetzung [21,9]:

$$[21,10] \quad \begin{array}{ll} \mu_{12} = 0,5 & \mu_{32} = 0,5 \\ \mu_{21} = 2,0 & \mu_{31} = -1,0 \end{array}$$

Dieses Ergebnis, das weiter unten noch ausführlicher untersucht wird, stellt einen ersten Anhaltspunkt dafür dar, daß das beschriebene Schlauchwandmodell tatsächlich Analogien zu einer stark gedehnten Arterie besitzt, da an Rindercarotiden unter dieser Bedingung ebenfalls μ'_{21} größer als μ'_{12} gefunden wurde.

Für den Quotienten aus Tangential- und Längsmodul ergibt sich im Zustand der „freien“ Dehnung

$$[21,11] \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{a_2}{a_1} = 4$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem an gedehnten Arterien gefundenen Modulverhältnis gut überein. Der Winkel φ beträgt bei „freier“ Dehnung

$$[21,12] \quad \varphi = 35,2^\circ$$

Denn wegen $\sigma_2/\sigma_1 = 0,5$ ist $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{0,5} = 0,707$.

Im folgenden sollen die Eigenschaften des Modells unter allgemeineren Voraussetzungen untersucht werden und mit den an Rinderearotiden gewonnenen Resultaten verglichen werden.

Um den Vergleich zu erleichtern, sollen zunächst mit Hilfe der in Abschnitt 10 abgeleiteten Transformationsgleichungen aus den Gl. [21,6] und [21,7] die entsprechenden Gleichungen für die spannungsbezogenen FRANKSchen Moduln berechnet werden. Unter der Voraussetzung, daß die Fasern des Modells undeformierbar sind (Gl. [21,9]), ergibt sich, daß einerseits die Querkontraktionszahlen in beiden Systemen gleich sind

$$[21,13] \quad \mu'_{ik} = \mu_{ik}$$

und daß andererseits die spannungsbezogenen FRANKSchen Elastizitätsmoduln genau doppelt so groß sind wie die kraftbezogenen. Durch Anwendung der Transformationen [10,22] und [10,23] erhält man unter Mitberücksichtigung der Gl. [21,5] und [21,9]

$$[21,14] \quad \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{\alpha_1} = 2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\sigma_1 + \sigma_2) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{\alpha_2} = 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned}$$

In der folgenden Tab. 6 sind die Querkontraktionszahlen einer Rinderearotis, diesmal als Funktion der Spannungen in Längs- und Tangentialrichtung eingetragen (in Abschnitt 20 war zur besseren Vergleichsmöglichkeit mit den berechneten Modellen die Abhängigkeit von den relativen Längen beschrieben worden). Ferner sind in Tab. 7 die Querkontraktionszahlen des Schlauchwandmodells mit undeformbarem Fasernetz, die unter der Voraussetzung [21,9] nach Gl. [21,7] berechnet wurden, eingetragen. Jene Werte, die aus methodischen Gründen bei der Arterie nicht gemessen werden konnten, wurden zur leichteren Übersicht auch bei der Berechnung des Modells weggelassen. In beiden Tab. wurden für die Bedingung „freier“ Dehnung, d. h. $\sigma_2 = \sigma_1/2$ erhaltenen Werte in Kursiv gesetzt.

So sehr die beiden Tabellen anscheinend voneinander abweichen, sind doch einige wichtige Parallelitäten zu finden. Die kursiv gesetzten Werte und die Werte für hohe Tangentialspannungen (σ_1) sind sowohl am Modell als auch an der Arterie für μ'_{21} größer als für μ'_{12} . Die Werte von μ'_{21} nehmen übereinstimmend in beiden Tabellen mit zunehmender Tangentialspannung zu, mit zunehmender Längsspannung ab. Die experimentell für μ'_{12} gewonnenen Werte nähern sich den berechneten mit zunehmenden Spannungen an.

Tabelle 6. Rinderearotis

	σ_1					
σ_1	0,66	1,33	1,99	2,66	3,32	
0,66	0,15	0,5	0,7			
1,33	0,2	0,3	0,6	0,8	1,0	μ'_{21}
1,99	0,1	0,3	0,4	0,7	0,8	
0,66	0,1	0,2	0,22			
1,33	0,05	0,05	0,22	0,4	0,4	μ'_{12}
1,99	0,05	0,05	0,25	0,30	0,36	

Tabelle 7. (Modell)

σ_2	σ_1					
	0,66	1,33	1,99	2,66	3,32	
0,66	1	2	3			
1,33	0,5	1	1,5	2	2,5	μ'_{21}
1,99	0,33	0,66	1	1,33	1,66	
0,66	1	0,5	0,33			
1,33	2	1	0,66	0,5	0,4	μ'_{12}
1,99	3	1,5	1	0,75	0,6	

Die Spannungen sind in 10^6 dyn/cm² angegeben.

Wie zu erwarten war, ist die Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment im niederen Spannungsbereich schlecht, da die Strukturfasern der Arterienwand unter diesen Verhältnissen sehr dehnbar sind, so daß der Faktor $(dL/dK) (K/L)$ in Gl. [21.7] nicht Null gesetzt werden kann. Er ist ohne Zweifel dehnungsabhängig und nimmt mit zunehmenden Spannungen bzw. Dehnungen ab. Daher wird die Übereinstimmung bei höheren Spannungen besser, jedoch nicht vollständig, da die Arterienwand auch im höchsten untersuchten Dehnungsbereich im Gegensatz zu dem Modell mit undehnbaren Fasern immer noch eine gewisse, wenn auch geringe Dehnbarkeit besitzt.

Grundsätzlich könnte man zur Verbesserung der Übereinstimmung des Modells mit dem Experiment eine Dehnbarkeit der Fasern berücksichtigen, was zwar in Gl. [21.6] und [21.7] bereits vorgesehen ist, jedoch erstens die Einführung empirischer Daten notwendig macht, wodurch die Beweiskraft der Berechnungen verringert wird, und zweitens zu sehr unübersichtlichen Gleichungen führt.

Das oben Gesagte gilt auch für das Ergebnis des Vergleichs der FRANKSchen Elastizitätsmoduln der Rindercarotis und des Modells, die in den Tab. 8 und 9 dargestellt sind.

In Anbetracht der Einfachheit des Modells ist hier die Übereinstimmung vor allem im höheren Spannungsbereich als sehr befriedigend zu bezeichnen. Es wird nicht nur die Zunahme der Modulwerte mit steigender Spannung, sondern auch der für Arterien typische Unterschied zwischen den Moduln in Tangential- und Längsrichtung von dem Modell richtig wiedergegeben.

Es sei hier an die Diskussion in Abschnitt 19 anschließend auf den Unterschied der neuen Modulbestimmung und deren Darstellung in Tabellenform gegenüber der bisher üblichen Vorgangsweise hingewiesen. Bei der Methode der Modulbestimmung mittels Dehnung eines Arterienstreifens in je einer Richtung ergeben sich nur die in einer Spalte bzw. einer Zeile in den Modultabellen angeschriebenen Werte entsprechend den in Dehnungsrichtung ausgeübten Spannungen. Messungen bei „freier“ Dehnung nach der FRANKSchen Methode lassen nur die unterstrichenen Werte der Modultabelle (für $\sigma_2 = \sigma_1/2$) bestimmen. Hierbei sind überdies Annahmen über das Verhalten der Querkontraktionszahlen zu machen, die wie erwähnt bisher meist unrichtig waren.

Die in den Tab. 6 bis 9 dargestellten Ergebnisse zeigen, daß der Spiralstruktur der Arterienwand eine wesentliche Bedeutung für das elastische Verhalten der Arterien zukommt.

Tabelle 8. (Rinder carotis)

σ_2	σ_1					
	0,66	1,33	1,99	2,66	3,32	
0,66	8,6	13,5	14,6			
1,33	8,6	17,3	16,6	17,3	17,3	ϵ_1
1,99	8,6	20,0	21,2	24,0	26,6	
0,66	5,3	4,8	3,3			
1,33	7,7	7,5	7,2	5,5	4,1	ϵ_2
1,99	12,0	9,3	7,7	7,2	6,6	

Tabelle 9. (Modell)

σ_2	σ_1					
	0,66	1,33	1,99	2,66	3,32	
0,66	2,6	8,0	16,0			
1,33	2,0	5,4	10,0	16,0	23,2	ϵ_1
1,99	1,8	4,4	8,0	12,4	17,8	
0,66	2,6	2,0	1,8			
1,33	8,0	5,4	4,4	4,0	3,8	ϵ_2
1,99	16,0	10,0	8,0	7,0	6,4	

Spannungen und Modulwerte sind in 10^6 dyn/cm² angegeben.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, wie die histologische Beobachtung zu erklären ist, daß der Steigungswinkel φ in der innersten Mediaschicht etwa 20° beträgt und nach außen bis auf etwa 50° zunimmt (Übersicht bei BENNINGHOFF 1930, DOERR 1963). Eine naheliegende Möglichkeit zur Deutung dieses Befundes ergibt sich aus dem schichtweisen Aufbau der Arterienwand, über den bereits Modelluntersuchungen durchgeführt wurden (MÜLLER 1959), die jedoch nicht das vorliegende Problem betrafen.

Wendet man näherungsweise Gl. [12.4] bzw. [17.2] auf die einzelnen Schichten der Arterienwand an, deren Media bekanntlich bis zu 30 Lagen elastischer Membranen enthalten kann, dann erkennt man, daß das Verhältnis von Längs- zu Tangentialkraft, das für die Größe des Steigungswinkels maßgeblich ist (Gl. [21.8]), von Schicht zu Schicht verschieden sein kann. Wenn die Dehnbarkeit der Schichten unterschiedliche Werte besitzt und beispielsweise die innersten Medialamellen weniger dehnbar sind als die außen anschließenden, dann werden die ersteren bei Innendrucksteigerung zuerst angespannt. Man kann in diesem Beispiel die inneren Schichten als die „hauptspannungstragenden“ bezeichnen, woraus unter anderem auch folgt, daß der Druck bereits in diesem inneren Bereich der Arterienwand stark abnimmt und in den äußeren Lagen sehr klein ist. Die druckbedingte „innere“ Längskraft ist daher in den Innenschichten der Media am größten und hebt dort die von der Längsfixation der Arterie in situ herrührende äußere Längskraft am weitestgehenden auf. Da unter den geschilderten Verhältnissen zudem auch die Tangentialkraft von innen nach außen kleiner werden muß, müssen sowohl das Verhältnis von Längs- zu

Tangentialkraft als auch der Steigungswinkel φ von innen nach außen zunehmen.

Dieses Verhalten stimmt mit der erwähnten histologischen Beobachtung überein. Wenn die Erklärung des morphologischen Befundes zutrifft, kann man daraus noch einen weiteren wichtigen Schluß ziehen. Im Extremfall, daß die spannungstragende Schicht einer Arterie ausschließlich an deren Innenfläche lokalisiert ist, wird der in der Arterie herrschende Druck nur von dieser innersten Schicht der Wand getragen. Offensichtlich bestehen in diesem Fall optimale Bedingungen für die Durchblutung der Vasa vasorum, da der im „Wandparenchym“ herrschende Druck gleich dem Umgebungsdruck, also praktisch Null ist. Wenn die spannungstragende Schicht am äußeren Umfang der Arterie lokalisiert ist, erscheint eine Durchblutung der Vasa vasorum praktisch unmöglich, da der Druck in allen Wandschichten gleich dem Innendruck der Arterie ist.

Diese Annahmen könnten eine Erklärung für die funktionelle Bedeutung des morphologischen Befundes sein und weisen somit darauf hin, daß normalerweise die hauptspannungstragende Schicht der Arterienwand in den inneren Mediaabschnitten zu finden ist. Dadurch wird ferner die Vermutung nahegelegt, daß die in der Wand großer Arterien vorhandene glatte Muskulatur in erster Linie der Einstellung optimaler Bedingungen für die Durchblutung der Vasa vasorum auf Grund des dargestellten Mechanismus zu dienen hat, indem sie die Spannungs- und Druckverteilung in der Arterienwand reguliert.

Eine ausführliche Untersuchung der zuletzt erwähnten Probleme würde den Rahmen dieser Studie weit überschreiten. Es sei daher lediglich darauf verwiesen, daß Versuche der Art, wie sie SCHÖNENBERGER u. MÜLLER (1960a) an Rinderaorten durchgeführt haben, eine Klärung der Frage bringen könnten, ob den zur Diskussion gestellten Gedankengängen tatsächlich praktische Bedeutung zukommt. (Vergl. JAEGER 1966.)

Auf jeden Fall zeigen diese abschließenden hypothetischen Erörterungen, daß das beschriebene Schlauchwandmodell nicht nur zur Erklärung des elastischen Verhaltens der Arterienwand dienen, sondern auch zu viel weitreichenderen Folgerungen auf dem Gebiet der Physiologie und Pathologie der Arterien führen kann.

Zusammenfassung

Die vorliegende Studie stellt die Grundlage einer Methodologie der Messung und Beschreibung der Arterienelastizität dar. Rückblickend ist unschwer zu verstehen, daß die Eigenschaften eines sehr dehnbaren und aus charakteristisch angeordneten Strukturelementen bestehenden Materials, wie es die Arterienwand darstellt, nicht durch die Bestimmung einiger Konstanten hinreichend beschrieben werden können.

Aus diesem Grund ist das klassische YOUNGSche Modulsystem zwar für sehr wenig dehnbare kristallinische Festkörper, jedoch nicht für sehr dehnbare Stoffe geeignet, da es jeder Richtung des untersuchten Materials nur einen einzigen konstanten Modul zuordnen kann.

Die von FRANK eingeführten differentiellen Moduln besitzen die zur Beschreibung der Arterienelastizität geforderte Eigenschaft, nichtlineare Beziehungen zwischen den Kräften, Spannungen und Elongationen erfassen zu können. Allerdings war die ursprünglich von FRANK (1906, 1920) gegebene Definition in vieler Hinsicht unvollständig und hat in der Literatur Unklarheiten und Mißverständnisse hervorgerufen.

Aus diesem Grund wurde hier versucht, eine vollständige Theorie dieser differentiellen Moduln aufzubauen.

Die zur Ergänzung dieser Theorie durchgeführten experimentellen Untersuchungen bilden einen wesentlichen Teil dieser Studie; ihre spätere Fortführung dürfte noch weitere Aufschlüsse bringen. Wenn sie andererseits zunächst nur als Demonstration der neuen Methodik gedacht war, zeigten die Ergebnisse doch auch neue und bemerkenswerte Zusammenhänge zwischen Arterienstruktur- und Elastizität. Man kann aus den Versuchsergebnissen mit gewisser Vorsicht sogar die Behauptung aufstellen, daß die elastischen Eigenschaften der Arterienwand mehr von der Anordnung als von der Dehnbarkeit der Strukturelemente abhängen.

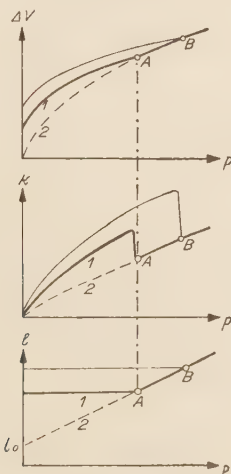


Abb. 22. Schematische Zusammenfassung des Dehnungsverhaltens von Arterien. Als gemeinsame Abszisse der 3 Diagramme ist der Innendruck p gewählt. Abhängigkeit des Volumens (oben; gegenüber der üblichen Darstellung um 90° gedreht), des Volumenelastizitätsmoduls κ (Mitte) und der Länge (unten) vom Innendruck bei verschieden starker Längsvordehnung. Die stark ausgezogenen Kurven (1) zeigen den Verlauf der Funktionen bei Drucksteigerung in einer längsfixierten Arterie. Die Kurven (2) sind bei „frei“ dehnbarer, d. h. nicht in Längsrichtung fixierter Arterie registriert. Da sich die Arterie bei „freier“ Dehnung mit zunehmenden Druck verlängert, münden schließlich alle, auch die bei vorheriger Längsfixation registrierten Kurven in die „freie“. An dem Punkt der Einmündung (A, oder bei einer stärkeren Längsvordehnung B) beginnt sich die fixierte Arterie zu schlängeln. Weitere Besprechung im Text.

Die für die physiologischen Verhältnisse wichtigsten experimentellen Ergebnisse seien noch durch die schematische Abb. 22 ergänzt und zusammengefaßt. In dieser Abbildung sind Innenvolumen, Volumenelastizitätsmodul und Länge eines Arteriensegments als Funktion des Innendrucks dargestellt.

Man erkennt (unten), daß die Länge des frei dehnbaren Segments bei Drucksteigerung zunimmt. Dehnt man die Arterie vor der Drucksteigerung in Längsrichtung und fixiert sie in dieser Lage, dann verändert sich der Verlauf der Druckvolumenkurve (oben) und daher auch der Volumenelastizitätsmodul (mitte). Die stark ausgezogenen Kurven (1) stellen das Verhalten der 3 Meßgrößen an einer längsfixierten Arterie dar. An jenem Punkt (A), an dem das Segment auch bei freier Dehnung (2) die durch Längsvordehnung bestimmte Länge erreicht hätte, münden alle 3 Kurven (1) in die „freie“ Dehnungskurve (2). An dieser Stelle beginnt sich die fixierte Arterie zu schlängeln. Bei stärkerer Längsvordehnung verschiebt sich dieser Punkt gegen höhere Druckwerte (B).

An jedem Arteriensegment kann eine beliebige Anzahl von Dehnungskurven registriert werden, deren Verlauf im einzelnen von dem Zustand der Arterie abhängt, d. h. davon, ob sie „frei“ oder in bestimmter Lage längsfixiert ist.

Da die meisten Arterien *in situ* längsfixiert sind, ergibt sich, daß ihre Dehnungseigenschaften von dem Grad der Längsdehnung und damit auch von dem Kontraktionszustand der Muskularis abhängt, die eine Verstärkung oder Verringerung der Längsvordehnung bewirken kann.

Vor allem zeigt sich die Beeinflussung der Dehnbarkeit durch Längsvordehnung an dem auffallenden Verhalten des Volumenelastizitätsmoduls, der bei längsfixierter Arterie steiler anwächst als bei „freier“ Dehnung, jedoch bei Punkt (A) (bzw. B) plötzlich absinkt. Diese „Unstetigkeit“ ist verständlich, wenn man die 3 Kurven vergleicht und bedenkt, daß bei Punkt A die „längsfixierten“ Kurven (1) unvermittelt in die „freien“ übergehen (2). Auf eine ausführliche Diskussion dieser Befunde, die schon an anderer Stelle (KENNER 1965 und Abschnitt 18) durchgeführt wurde, kann hier verzichtet werden.

Die Abb. 22 faßt auch alles wesentliche der Theorie insofern zusammen, als gezeigt wird, daß Längs- und Tangentialdehnung sich deutlich gegenseitig beeinflussen. Diese Abhängigkeit kann durch die YOUNG'schen Moduln niemals erfaßt werden, da diese für jede Richtung unabhängig von etwaigen gleichzeitigen Dehnungen in anderen Richtungen nur einen einzigen Wert haben können, und auch nicht durch die ursprünglich von FRANK angegebenen differentiellen Moduln, die ebenfalls nur in einer Richtung stattfindende Dehnungen exakt erfassen konnten. Auf Grund der neugefaßten Definitionen können die FRANK'schen Moduln auch bei gleichzeitig in mehreren (bei Schläuchen zwei) Richtungen bewirkten Dehnungen bestimmt werden und müssen zur Erfassung der gegenseitigen Beeinflussung in Tabellen angeschrieben werden, deren Zeilen von den Dehnungen bzw. Spannungen in Tangentialrichtung abhängen.

Die gegenüber dem Verhalten von Gummischläuchen auffallend unterschiedliche Beziehung zwischen Längs- und Tangentialdehnbarkeit von Arterien ist, wie sich durch Vergleich mit einem einfach berechenbaren Modell ergibt, wesentlich durch die spiralförmige Struktur des Wandaufbaues bedingt.

Summary

For the description of the static elasticity of the highly extensible arterial walls it is necessary to define suitable moduli of elasticity. O. FRANK has shown already 1906 that YOUNG's modulus is insufficient for this purpose. It is clearly demonstrated in this paper, that YOUNG's modulus is only suitable for the description of the elastic properties of very stiff material, f. i. metals. The use of YOUNG's modulus as a measure of elasticity of highly extensible materials, f. i. rubber or arterial wall, brings about very serious difficulties and even errors. Therefore O. FRANK has proposed a new definition of a modulus of elasticity, based on a differential principle.

In this paper it is shown that the original definition of O. FRANK yet contains great uncertainties. A new and more exact definition of FRANK's modulus of elasticity is proposed and its use is demonstrated. The elasticity of rubber and arterial wall material is shown to depend not only on the extension in one direction but on the simultaneously existing extension in all possible directions. Therefore the pressure-volume diagrams of arteries and elastic tubes depend in a typical way on their prefixed length. To characterize the elasticity of an elastic tube it is necessary to measure the pressure-volume curves allowing for free lengthening of the tube as well as at different prefixed extensions in longitudinal direction. The significance of this theory is demonstrated on several models and by means of experiments on rubber tubes and ox carotid artery.

Furthermore it is shown that the elastic properties of arteries depend in a typical way on the structure of the arterial wall. In the first line this fact can be demonstrated by means of measuring the so-called Poisson ratio. This ratio is commonly supposed to be 0.5 in all incompressible materials. In this paper it is shown that the Poisson ratio of arterial wall is nearly Zero in the unextended artery and approaches a value greater than 0.5 in the extended artery. The value of the POISSON ratio is dependent on the direction of strain. This in good agreement with the results of model calculations. A model of the

arterial wall is used, having a structure spiral fibers. The structure of the arterial wall is supposed to have a very significant importance for the elastic properties and the function of the arteries.

Literatur

- ATTINGER, E. O., Pulsatile Blood Flow (New York-Toronto-London 1964). — BADER, H., The Anatomy and Physiology of the vascular wall, Handbook of Physiologie, Circulation II, pp. 865 (Washington 1963). — BADER, H. und E. KAPAL, Über die Bedeutung der Wandmuskulatur für die elastischen Eigenschaften des Aortenwindkessels. Z. Biol. **109**, 250 (1957). — BADER, H. und E. KAPAL, Experimentelle Untersuchungen über die Druck-Volumenbeziehung von Gummischläuchen. III. Mitteilung. Z. Biol. **111**, 15 (1960). — BADER, H. und E. KAPAL, Vergleichende Untersuchungen über die Elastizität der Aorten verschiedener Tierarten und des Menschen. Z. Biol. **114**, 89 (1963). — BENNINGHOFF, A., Über die Beziehung zwischen elastischem Gerüst und glatter Muskulatur in der Arterienwand und ihre funktionelle Bedeutung. Z. Zellforschg. **6**, 348 (1927). — BENNINGHOFF, A., Blutgefäße und Herz, Handbuch der mikroskopischen Anatomie, Vol. VI 1, S. 1 (Berlin 1930). — BERGEL, D. H., The static elastic properties of the arterial wall. J. Physiol. **156**, 445 (1961). — BURTON, A. C., Relation of structure to function of the tissues of the wall of blood vessels. Physiol. Rev. **34**, 619 (1954). — DOERR, W., Perfusionstheorie der Arteriosklerose (Stuttgart 1963). — FAUCETT, TH. R., Deformation analysis of flexible anisotropic tubes. In: REMINGTON, J. W., Tissue Elasticity, pp. 160 (Washington 1957). — FRANK, O., Die Grundform des arteriellen Pulses. Z. Biol. **37**, 483 (1899). — FRANK, O., Die Analyse endlicher Dehnungen und die Elastizität des Kautschuks. Annalen d. Physik **21**, 602 (1906). — FRANK, O., Die Elastizität der Blutgefäße. Z. Biol. **71**, 255 (1920). — FRANK, O., Die Theorie der Pulswellen. Z. Biol. **85**, 91 (1926a). — FRANK, O., Der arterielle Puls. Sitz. Ber. Ges. Morph. u. Physiol., München **37**, 33 (1926b). — FRANK, O., Die Elastizität der Blutgefäße, II. Mitteilung. Z. Biol. **88**, 105 (1929). — HARDUNG, V., Die Bedeutung der Anisotropie und Inkompressibilität bei der Bestimmung der Elastizität der Blutgefäße. I. Angiologica **1**, 141 (1964a), II. Angiologica **1**, 185 (1964b). — JAEGER, M., Etude de l'élasticité et des tensions de la carotide de vache en comparaison avec l'aorte et le coronaire. Helvet. Physiol. Acta. **20**, 7 (1962). — JAEGER, M., Variation du comportement élastique de la paroi carotidienne depuis son prélèvement, Helvet. Physiol. Acta. **20**, 282 (1962). — JAEGER, M., L'élasticité des artères et son influence sur leur irrigation. Helvet. Physiol. Acta. Supplement **17**, 1 (1966). — KARNEBAUM, S., Elastizität und Morphologie des Aortenwindkessels beim Bluthochdruck. Arch. Kreislaufforschg. **34**, 18 (1961). — KENNER, TH., Über die notwendige Ergänzung der FRANKSchen Elastizitätstheorie. Z. Biol. **144**, 363 (1964a). — KENNER, TH., Über die Bedeutung der Längsspannung und deren Einfluß auf die Dehnbarkeit der Arterien. Z. Kreislaufforschg. **53**, 865 (1964b). — KENNER, TH., Die Druck-Volumenkurve längsfixierter Arterien und die Bestimmung der Elastizitätsmoduln. Pflügers Arch. **285**, 211 (1965). — KENNER, TH. und W. WALDHÄUSL, Experimentelle Untersuchungen zur FRANKSchen Elastizitätstheorie. Z. Biol. **114**, 127 (1963). — KENNER, TH. und W. WALDHÄUSL, Experimentelle Untersuchung über die Querkontraktionszahl der Arterienwand, Pflügers Arch. **281**, 212 (1964a). — KENNER, TH. und W. WALDHÄUSL, Über den Übertritt von Erythrozyten in die Darmlymphe bei Pfortaderabklemmung. Z. Biol. **114**, 358 (1964b). — KENNER, TH. und E. WETTERER, Studie über die verschiedenen Definitionen des Elastizitätsmoduls in der Haemodynamik, Z. Biol. **114**, 11 (1963). — KRICK, J., Quer- und Längsdehnbarkeit der Arterien, Arch. Kreislaufforschg. **16**, 145 (1950). — v. KRIES, J., Über die Beziehungen zwischen Druck und Geschwindigkeit welche bei der Wellenbewegung in elastischen Schläuchen bestehen. Festschrift der 56. Versammlung dtsch. Naturforscher u. Ärzte (Freiburg i. B. und Tübingen 1883). — v. KRIES, J., Studien zur Pulslehre (Freiburg i. B. 1892). — LASZT, L., Über die Eigenschaften der Gefäßmuskulatur mit besonderer Berücksichtigung der Kalium-Wirkung. Arch. Kreislaufforschg. **32**, 220 (1960). — LAWTON, R. W., The thermodynamic behaviour of isolated aortic strips of the dog. Circ. Res. **2**, 344 (1954).

— LEWI, P. und W. SCHAPER, Über die Elastizitätslehre hochdehnbarer Körper. Vergleich zwischen Kristallelastizität und Gummielastizität. *Z. Biol.* **114**, 380 (1964). — LOVE, A. E. H., A treatise on mathematical Elasticity (London 1927); zit. nach BERGEL (1961). — McDONALD, D. A., Blood flow in Arteries (London 1960). — MOENS, A. I., Die Pulscurve (Leiden 1878). — MÜLLER, A., Einführung in die Mechanik des Kreislaufs. In: Hdb. biol. Arbeitsmeth. V, 8 Heft 1 (1928). — MÜLLER, A., Die mehrschichtige Rohrwand als Modell für die Aorta. *Helvet. Physiol. Acta* **17**, 131 (1959). — REMINGTON, J. W., Pressure-Diameter relations of excised aorta, *Amer. J. Physiol.* **202**, 1166 (1962). — RÖNTGEN, W. C., Pogg. Ann. **9**, 601 (1876) zit. nach FRANK (1906). — SCHÖNENBERGER, F. und A. MÜLLER, Über die Vaskularisation der Rinderaortenwand. *Helvet. Physiol. Acta* **18**, 146 (1960a). — SCHÖNENBERGER, F. und A. MÜLLER, Über die Elastizität und Reaktionsfähigkeit der extracorporalen in physiologischem Zustand erhaltenen Rinder-aorta. *Helvet. Physiol. Acta* **18**, 151 (1960b). — SCHÖNENBERGER, F. und A. MÜLLER, Über die Elastizitäts- und Spannungsverhältnisse der Rinder-Coronararterie und ihr Vergleich mit denjenigen der Rinder-aorta. *Helvet. Physiol. Acta* **19**, 58 (1961). — SIMON, E. und W. W. MEYER, Das Volumen, die Volumendehnbarkeit und die Druck-Längen-Beziehungen des gesamten aortalen Windkessels in Abhängigkeit von Alter, Hochdruck und Arteriosklerose. *Klin. Wschr.* **36**, 424 (1958). — TREOLAR, L. R. G., The Physics of Rubber Elasticity (Oxford 1958). — WAGNER, R. und E. KAPAL, Über Eigenschaften des Aortenwindkessels. *Z. Biol.* **104**, 169 (1951). — WAGNER, R. und E. KAPAL, Über Eigenschaften des Aortenwindkessels, 2. Mitteilung. Untersuchung an menschlichen Aorten verschiedenen Alters. *Z. Biol.* **105**, 263 (1952). — WEBER, E. H., Über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre. *Ber. Verh. Königl. Sächs. Ges. Wiss. S.* 164 (Leipzig 1850). — WEBER, E. H., *Annotationes Anatomicae et Physiologicae; Programmata collecta.* (II. De utilitate parietis elastici arteriarum. Programma de 25. Aprilis 1828 ed. S. 8 (Leipzig 1851). — WEBER, W., Theorie der durch Wasser oder andere incompressible Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen. *Verh. Königl. Sächs. Ges. Wiss.* **18**, 353 (Leipzig 1866). — WETTERER, E. und TH. KENNER, Grundlagen der Dynamik des Arterienpulses. Monographie (im Druck). — WEZLER, K. und A. BÖGER, Die Dynamik des arteriellen Systems. *Erg. Physiol.* **41**, 292 (1939). — WEZLER, K. und F. SCHLÜTER, Die Querdehnbarkeit kleiner Arterien vom muskulären Typ. **8**, 417 (Mainz 1953). — WEZLER, K. und W. SINN, Das Strömungsgesetz des Blutkreislaufs, (Aulendorf 1953). — WÖHLISCH, E. R., Du MESNIL DE ROCHEMONT und H. GERSCHLER, Untersuchung über die elastischen Eigenschaften tierischer Gewebe. *Z. Biol.* **85**, 325 (1927). — WOLINSKY, H. und S. GLAGOV, Structural basis for the static mechanical properties of the aortic media. *Circ. Res.* **14**, 400 (1964).

Anhang

Inhalt: Übersicht über die wichtigsten verwendeten Symbole.

1. Längen: allgemeine Bezeichnung l

Indizes: Da die Theorie sowohl allgemein als auch speziell auf Schläuche angewendet wird, sind die Richtungen mit den folgenden Zahlenindizes anstelle der gebräuchlichen Buchstabenindizes bezeichnet.

- 1 = t (Tangentialrichtung)
- 2 = l (Längsrichtung)
- 3 = r (Radialrichtung)

Bei Berechnungen und Messungen an Schläuchen werden folgende Bezeichnungen verwendet.

- $l_1 = 2r\pi$ (Umfang)
- $l_2 = l$ (Länge eines Schlauchsegments)
- $l_3 = h$ (Wanddicke)
- r (Radius)

Null als alleiniger oder zweiter Index bedeutet den ungedehnten Ausgangszustand (z. B. $r_0, h_0, l_0 = 2 r_0 \pi$).

2. Elongation und relative Länge

$$\Delta l = l - l_0 \quad (\text{Längenzuwachs})$$

$$\varepsilon^* = \Delta l / l_0 \quad (\text{Elongationen bezogen auf die Ausgangslänge})$$

$$\varepsilon = dl / l \quad (\text{differentielle Elongation})$$

$$\varepsilon = d\lambda / \lambda \quad (\text{differentielle Elongation})$$

$$\lambda = l / l_0 \quad (\text{relative Länge bezogen auf die Ausgangslänge})$$

3. Querschnitt: allgemeine Bezeichnung q

Der Index von q bezieht sich immer auf die zum Querschnitt senkrecht stehende Richtung (z. B. q_1 ist die zu Richtung 1 senkrecht stehende Querschnittsfläche und beträgt beim dünnwandigen Schlauch $2 r \pi h$).

4. Volumina:

$$V_W \quad (\text{Volumen eines untersuchten Materials, gesamtes Volumen der Wand eines Schlauchsegments. } V_W = l_1 l_2 l_3. \text{ Am dünnwandigen Schlauch: } V_W = 2 r \pi h l)$$

$$V = r^2 \pi l \quad (\text{Innenvolumen eines Schlauchsegments})$$

5. Kräfte, Spannungen und Drucke:

$$K \quad (\text{Kraft})$$

$$\sigma = K / q \quad (\text{Spannung})$$

$$p \quad (\text{Druck})$$

Für die in 2., 3. und 5. genannten Größen gelten bezüglich der Richtungsindizes die gleichen Regeln wie für die Längen.

6. Arbeit, Energie oder Dehnungspotential:

allgemeine Bezeichnung U

$$W = U / V_W \quad (\text{Dehnungsenergie} = \text{Dehnungspotential, bezogen auf die Volumeneinheit des Materials})$$

7. Elastizitätsmoduln (allgemein E) und Querkontraktionszahlen (allgemein μ):

Für das YOUNGSCHE Modulsystem

$$E_k^* = \frac{1}{A_k} \quad \text{bzw.} \quad \mu_{ik}^*$$

Für das „kraftbezogene“ FRANKSCHE Modulsystem

$$E_k = \frac{1}{a_k} \quad \text{bzw.} \quad \mu_{ik}$$

Für das „spannungsbezogene“ FRANKSCHE Modulsystem

$$\epsilon_k = \frac{1}{\alpha_k} \quad \text{bzw.} \quad \mu'_{ik}$$

Bei den Querkontraktionszahlen wird die Wirkung einer in Richtung k angreifenden Kraft oder Spannung auf die Elongation in Richtung i untersucht. Für die Indizes i und k sind die unter 1. genannten Richtungsindizes zu setzen. Die reziproke Schreibweise der Moduln (z. B. $E = 1/a$) ist zur formalen Vereinfachung vieler Gleichungen vorteilhaft.

Als allgemeiner Richtungsindex wird k verwendet und kann somit 1, 2 oder 3 bedeuten.

Anschrift des Verfassers:

Priv. Doz. Dr. Th. KENNER, II. Physiologisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg,
852 Erlangen

